АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

7559—8357

*

№ 10 1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Б. С. Балакшин, Е. Е. Захаров, С. М. Лисичкин (зам. председателя), В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 2
Основания математики и математическая логика 3
Теория чисел 5
Алгебра 11
Многочлены и линейная алгебра . . . 11
Группы 15
Поля, кольца и структуры 19
Алгебраическая теория схем связи и управления 27
Топология 30
Теория функций действительного переменного 40
Теория множеств 44
Приближение функций полиномами и их обобщениями 45
Теория функций комплексного переменного 48
Дифференциальные уравнения 56
Обыкновенные дифференциальные уравнения 56
Уравнения в частных производных . . . 62
Приложения к физике, технике и естественным наукам 69
Интегральные уравнения 71
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 73
Числовые ряды 78
Специальные функции 80
Интегральные преобразования и операционное исчисление 82
Приложения общих методов математического анализа 86
Функциональный анализ 87
Теория вероятностей 99
Математическая статистика 102
Теория игр и математическая экономика 106
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 107
Геометрия 109
Приложения геометрии 109
Элементарная геометрия 110
Проективная и начертательная геометрия 111
Алгебраическая геометрия 112
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 116
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 117
Метрические методы в геометрии . . . 127
Геометрия выпуклых многообразий . . . 130
Численные и графические методы 131
Таблицы 141
Вычислительные машины и математические приборы 143
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 152

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 7559—8357 **№ 10** **Октябрь 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

7559. **Проблемы и задачи Словацкой академии наук.** Сирацкий (Problémy a úlohy Slovenskej akadémie vied. Siráckу Andrej), Naša veda. 1957, 4, № 2, 49—56 (словацк).

7560. **IV Конгресс румынских математиков. Бухарест, 27 мая—4 июня 1956 г.** Фиторис (IV. Kongreß der Rumänischen Mathematiker. Bukarest, 27. Mai—4. Juni 1956. Vietoris L.), Internat. math. Nachr., 1956, 10, № 45—46, 6—7 (нем.)
См. также РЖМат, 1957, 6767.

7561. **VII очередное годичное собрание Общества математиков и физиков. НР Хорватии.** Вучкич (VII. Redovna godišnja skupština Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske. Vučkić Miljenko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, 11, № 1, 76—77 (сербо-хорв.)

7562. **Сборник тезисов докладов 18-й научно-технической конференции Института** (Ленингр. ин-т инж. ж.-д. трансп.). Л., 1956, 276 стр.

Приводятся, в частности, тезисы докладов: Шаревич Д. И., Преобразование релейно-контактных схем путем применения на реле противодействующих обмоток; Самойлов А. И., Использование теории корреляции при анализе случайных процессов; Борисевич И. А., Свойства пучков и связок в центральных и параллельных проекциях; Бутова Г. В., Исследование развертки линии пересечения кругового цилиндра с параболическим; Клоповский И. С., Теорема Дезарга и ее значение в проективной геометрии; Тихонович А. П., Преобразование ортогонального чертежа; Ямолович И. И., Изучение и построение винтовых линий и поверхностей; Малахов И. А., Криволинейное проектирование; Иодковская Н. К., Построение теней на архитектурных деталях с помощью гиперболоидов вращения.

7563. **Итоговая студенческая научная конференция, посвященная 86-й годовщине со дня рождения Владимира Ильича Ленина.** (Харьковск. ун-т). Тезисы докладов. Харьков. Ун-т, 1956, 375 стр., беспл.

Приводятся, в частности, тезисы докладов: Щербина В. А., О построении формул обращения для одного класса сингулярных интегралов; Вербицкий И. Л., Оценка остаточного члена в асимптотической формуле Кронекера—Вейля; Островский И. В., Теорема М. Картрайт и некоторые обобщения ее; Ващенко О. А., Задача Ли—Бюля и ее обобщение; Диденко А. И., Обобщение одной формулы В. А. Стеклова; Файнберг Е. Д., О применении спаренных интегральных уравнений к задаче о дифракции звуковых волн и задаче о гармоническом колебании в воздухе жесткого диска; Кукушкин Л. С., Об одном новом классе спаренных интегральных уравнений с цилиндрическими ядрами; Сухина Н. В., Статистические методы контроля производственного процесса.

7564. **Критический обзор литературы о преподавании первых тем алгебры в VI классе.** Лихачева О. Я., Уч. зап. Вологод. пед. ин-та, 1956, 17, 101—166

7565. **Геометрия и действительность. III.** Динглер (Geometrie und Wirklichkeit. III. Dingler Hugo), Dialectica, 1956, 10, № 1, 80—93 (нем.)
Части I и II см. РЖМат, 1957, 7.

7566 К. **Курс математики.** Басс (Cours de mathématiques. Bass Jean, (Professé à l'École nat. supér. Aéraonaut. et à l'École nat. supér. des mines de Paris). Paris, Masson et Cie, 1956, 916 pp., ill., 8.500 fr.)

Книга представляет собой расширенный курс математики высших национальных школ воздухоплавания и горного дела в Париже и содержит линейную алгебру, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию аналитических функций, дифференциальные уравнения с обыкновенными и частными производными. Не включены аналитическая геометрия и элементарный математический анализ, предполагающиеся известными. Основная цель курса — ознакомить будущих инженеров с важнейшими понятиями современной математики и создать теоретическую базу для дальнейшей технической специализации. Поэтому большое внимание уделено приложениям; в частности, приводятся численные методы вычислений рядов и интегралов, численное решение дифференциальных уравнений и элементы номографии. Автор придерживается достаточного для технической школы уровня математической строгости, добиваясь наглядности изложения: ряд теорем только формулируется, в отдельных случаях даются лишь идеи доказательств.

Приводим содержание книги по частям (I—VII). В ч. 1 «Линейная алгебра» изучаются линейные преобразования векторного пространства. В качестве приложения рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Даются также элементы векторного и тензорного исчислений. Ч. II «Одинарные интегралы» посвящена теории интеграла Римана и его обобщениям. Указываются способы численного вычисления определенных интегралов и рядов. В ч. III «Функции, определенные

рядами и интегралами», изучаются функциональные ряды и собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. В частности, рассматриваются тригонометрические ряды Фурье, ряды ортогональных функций и интеграл Фурье. В ч. IV «Кривые криволинейные интегралы» приведена теория пространственных кривых и теория криволинейных интегралов в векторной трактовке. Рассмотрены приложения криволинейных интегралов к механическим квадратурам. В ч. V «Поверхности. Кратные интегралы» рассматриваются элементы теории поверхностей, двойные и тройные интегралы, поверхностные интегралы, формулы Стокса и Остроградского и их векторная интерпретация. Излагаются также теория эйлеровых интегралов, формула Стирлинга и преобразование Лапласа. Ч. VI «Аналитические функции» содержит сведения о производной и интеграле в комплексной области, конформных отображениях, рядах аналитических функций и теории вычетов. В ч. VII «Дифференциальные уравнения и системы» приводится идея метода последовательных приближений для решения задачи Коши. Рассматриваются общие свойства решений линейных систем с переменными коэффициентами. Изучаются линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка, включая уравнение Бесселя. Дается понятие о численном интегрировании дифференциальных уравнений методом Адамса. В ч. VII «Уравнения с частными производными. Потенциалы» изучаются уравнения с частными производными 1-го порядка и линейные уравнения с частными производными 2-го порядка. В частности, рассматриваются уравнения колебаний струны, уравнение колебаний мембраны, волновое уравнение для радиального случая, уравнение теплопроводности для стержня и различные методы их решений. В связи с уравнением Лапласа вводятся понятия гармонических функций и ньютоновых потенциалов. К каждой части приводятся библиография с краткими аннотациями и упражнения.

Приложения (841—880): А) Экстремальные задачи. Вариационное исчисление; Б) Понятие о номограммах. В конце книги приведены: список основных формул, именной указатель с хронологическими датами и национальной принадлежностью, общая библиография с вводными пояснениями, предметный указатель. Б. П. Демидович

7567 К. Курс высшей математики. (Учебник для механ.-матем. и физ.-матем. фак. ун-тов и для втузов с расшир. программой). Т. 1. Изд. 17-е стереотипн. Смирнов В. И. М., Гостехиздат, 1957, 478 стр., илл., 11 р. 40 к.

7568 К. Курс высшей математики. Учебник для обычных высших технических институтов. Крейндлер (Curs de matematici superioare. A probat de Ministerul învățămîntului pentru uzul Institutelor tehnice superioare. Kreindler O. București, Ed. tehn., 1956, 781 p.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 10, 388 (рум.)

7569 К. Курс тригонометрии для техникумов. Изд. 3-е. Кожеуров П. Я. М., Гостехиздат, 1956, 336 стр., илл., 6 р. 45 к.

7570 К. Сборник задач по элементарной математике. Пособие для самообразования. Изд. 3-е. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. М., Гостехиздат, 1957, 532 стр., 9 р. 40 к.

7571 К. Сборник контрольных работ по математике. Для студ. заочн. III курса, окончивших учительск. ин-ты и студ.-заочн. I курса физ-матем. фак. пед. ин-тов. М., Учпедгиз, 1956, 120 стр., 1 р. 45 к.

7572 К. Решение специальных математических вопросов, поставленных на устных экзаменах в высших учебных заведениях. Тетрель (Solutions de questions de mathématiques spéciales posées aux examens oraux des Ecoles polytechnique, normale, centrale. 2 partie. Fasc. I. Géométrie analytique. 7 éd. Tétrel Alfred. Paris, Croville, 1956, 295 p., ill., 740 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 19, 440 (франц.)

7573 К. Математическая картография. Ломницкий (Kartografia matematyczna. Wyd. 2 zmien. Łomnicki Antoni. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 176 s., il., 16 zł.), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 2, 17 (польск.)

7574 К. Пособие по математике для топографических техникумов. Дроздецкий В. В. М., Геодезиздат, 1956, 363 стр., илл., 9 р. 36 к.

7575 Ж. Журнал чистой и прикладной математики. Акад. РНР, Бухарест. 1956, Т. 1, № 1.

Этим выпуском начинается новая серия периодических изданий Академии Румынской Народной Республики, являющаяся продолжением аналогичных научных изданий, вышедших из печати под названием «Наука в Румынской Народной Республике» (1952, 1953) и «Журнал математики и физики» (1954).

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

7576. Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов. Райк А. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 233—234

7577. Об издании полного собрания научных трудов М. В. Остроградского. Погребысский И. Б., Штокало И. З., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 233

7578. Л. Эйлер и рассмотрение проектов постоянного моста через р. Неву в Петербургской Академии Наук. Раскин Н. М., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 3, 38—48

7579. О грузинских мерах времени и о методах вычислений, примененных в грузинском солнечном календаре. Цхакаиа Д. Г., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1956, 22, 301—317

7580. Деятельность киевской математической школы в 1908—1917 гг. Добровольский В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 230—231

7581. Математические труды Николая Артавазда. Петросян Г. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 232—233

7582. Эйнштейн. Кустаанхеймо (Einstein. Kustaanheimo Paul), Arkhimedes, 1956, № 2, 5—10 (фин.)

7583. Арташес Липаритович Шагинян. (К 50-летию со дня рождения), Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, **10**, № 1, 3—8

7584. Филиппо Сибирани. Вароли (Filippo Sibirani Varoli Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 1, 125—130 (итал.)

7585. Джозеф Фелс Ритт (1893—1951). Смит (Joseph Fels Ritt. 1893—1951. Smith Paul A.), Biogr. Mem. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, **29**, 253—264 (англ.)

7586. Некролог профессора Карела Чупра. Балада (Profesor Karel Čupr zemřel. Balada Fr.), Mat. škole, 1957, **7**, № 1, 59—60 (чешск.)

См. также: 7591К, 7592К, 7627, 7776К, 7777К, 7944, 7973, 8035, 8112, 8114, 8118, 8129, 8130—8132, 8320, 8350, 8351

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

7587. Обобщенное логическое исчисление. Такэути (On a generalized logic calculus. Takeuti Gaisi), 日本數學集報 > Нихон сугаку сюхо, Japan J. Math., 1953, 23, 39—96 (англ.)

Рассматривается исчисление генценовского типа для теории типов. Это исчисление содержит символы для постоянных («специальных») и переменных (свободных и связанных) предикатов и функций. Типы имеют вид $(n_1, \ldots, n_i)$, где $n_1, \ldots, n_i$ — натуральные числа $\geqslant 0$. Аргументами переменного предиката типа $(n_1+1, \ldots, n_i+1)$ служат «многообразия» типов $n_1, \ldots, n_k$ соответственно; при замещении аргументных мест этими многообразиями получается формула; многообразия типа (0) называются термами. Многообразия определяются индуктивно: каждый постоянный или переменный предикат типа (0) служит многообразием типа (0), если аргументные места постоянной или переменной функции типа $(n_1+1, \ldots, n_i+1)$ заполнить многообразиями типов $n_1, \ldots, n_i$ соответственно, получится многообразие типа (0); если свободные переменные a^k типа n_k некоторой формулы заменить связанными переменными φ^k $(1 \leqslant k \leqslant i)$ того же типа и приставить спереди $(\varphi^1, \ldots, \varphi^i)$, то получится многообразие типа $(n_1+1, \ldots, n_i+1)$. Имеются кванторы для связанных предикатов и функций. (Автор называет предикаты «переменными» и обозначает свободные и связанные переменные для предикатов и функций разными символами).

Логические аксиомы и правила вывода — такие же как в классическом исчислении Генцена LK (или G1 из последней главы книги Клини (реф. 7591)) с добавлением прежних правил для новых типов переменных и правила переименования для связанных переменных.

Это исчисление автор называет GLC. Переменная типа $(n_1, \ldots, n_i)$ обозначается $a(n_1, \ldots, n_i)$ и т. п. Тип (n) обозначается просто n. Если $T(a^1(n_1), \ldots, a^i(n_i))$ — терм, а $\varphi^1(n_1), \ldots, \varphi^i(n_i)$ — связанные предикатные переменные, не содержащиеся в этом терме, то выражение $\{\varphi^1(n_1), \ldots, \varphi^i(n_i)\}\, T(\varphi^1(n_1), \ldots, \varphi^i(n_i))$ называется функционалом типа $(n_1+1, \ldots, n_i+1)$. Высотой предиката, функции, многообразия или функционала типа $(n_1, \ldots, n_i)$ называется наибольшее из чисел $n_1, \ldots, n_i$. Часть исчисления GLC, в которой высота всех предикатов $\leqslant i$, а высота всех функций $\leqslant i+1$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, автор называет G^iLC. Доказывается, что если к GLC можно без противоречия присоединить аксиомы, характеризующие скалярное поле, то непротиворечива теория действительных чисел. Если всякую секвенцию, доказуемую в GLC, можно доказать без помощи сечений, то теория действительных чисел непротиворечива, и аналогичный результат имеет место для G^1LC.

Это утверждение об устранимости сечений автор называет «основной гипотезой». А. С. Есенин-Вольпин

7588. Об основной гипотезе для GLC. I—IV. Такэути (On the fundamental conjecture of GLC. I—IV. Takeuti Gaisi), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 3, 249—275; 1955, 7, № 4, 394—408; 1956, 8, № 1, 54—64; 1956, 8, № 2, 145—155 (англ.)

Доказывается основная гипотеза (реф. 7587) для некоторых видов доказательств.

В части I рассматриваются доказательства, никакая исходная секвенция которых не содержит логических символов и не содержащие $\forall \to$ и $\to \exists$ выводов по переменным высоты 1, боковая формула которых не содержит собственные кванторы по переменным высоты 1. (Здесь используется терминология Клини (реф. 7591); собственный символ — это такой, который не входит ни в какое многообразие, содержащееся в данной формуле). Для таких доказательств доказывается устранимость сечений.

В части II устранимость сечений доказывается для подсистем и PL QL системы G^1LC. PL получается из генценовского исчисления LK (реф. 7587) введением предикатных переменных высоты 1 без аргументных мест (эти переменные получаются из одноместных предикатных переменных высоты 1 замещением аргументного места фиксированным «предикатом»; термин «предикат» здесь понимается, как в реф. 7587 — он может иметь тип (0)). QL — это подсистема G^1LC, содержащая только доказательства, в которых нет $\forall$-выводов по переменной типа (0).

В части III устранимость сечений устанавливается для доказательств некоторого специального вида, именуемых простыми. В определении этих доказательств считается, что единственными логическими символами служат $\wedge$ (конъюнкция), $\neg$ и $\forall$. Логический символ (т. е. вхождение логического символа. *Прим. реф.*) называется положительным или отрицательным в формуле, смотря по тому, содержится он в четном или нечетном числе областей действия символа $\neg$ в этой формуле. Если два логических символа σ и τ некоторой формулы оба положительны или оба отрицательны, σ называется положительным относительно τ; в противном случае, σ называется отрицательным относительно τ. Если σ и τ — два квантора $\forall$ некоторой формулы, относящиеся к переменным предикатам высоты 1 («f-переменным») и τ лежит в области действия σ, мы говорим, что σ взаимодействует с τ (σ affects τ), если в области действия τ имеется переменная, к которой относится σ. $\forall$-квантор σ по f-переменной в формуле $\mathfrak{A}$ называется полупростым в $\mathfrak{A}$, если 1) всякий $\forall$-квантор τ по f-переменной, входящий в область действия σ, положителен относительно σ, и 2) если $\forall$-квантор τ по f-переменной совпадает с σ или входит в область действия σ, то τ не взаимодействует ни с каким $\forall$-квантором по f-переменной и никакой такой $\forall$-квантор не взаимодействует с τ. Если в области действия полупростого квантора σ нет свободных f-переменных, то этот квантор σ называется простым. Формула называется простой, если все ее $\forall$-кванторы по f-переменным просты. $\forall \to$-вывод по f-переменной называется простым, если главная формула этого вывода имеет вид $\forall\varphi F(\varphi)$, а боковая формула — вид $F(H)$. Доказательство называется простым, если каждый его $\forall$-вывод по f-переменной является простым, коль скоро главная формула этого вывода лежит выше некоторой формулы сечения в некоторой связке (терминологию см. добавление VII к книге Клини (реф. 7591).

В Appendix'е части III устранимость сечений доказывается также для случая, когда в каждом $\forall \to$-выводе по f-переменной, в только что описанных обозначениях, формула H не содержит кванторов $\forall$ (теорема 2) или $\neg$ (теорема 3), коль скоро главная формула этого вывода лежит выше некоторой формулы сечения.

Одна лемма из части III доказывается только в части IV.

В части IV результат части I переносится на доказательства, которые автор в этой части называет нормальными. Это доказательства, удовлетворяющие следующим двум условиям (в формулировке которых

нитью (fibre) мы называем всякую часть связки, содержащую не более одной формулы в каждой секвенции и любые две соседние формулы которой являются в данном доказательстве соответствующими друг другу):

1.1. Каковы бы ни были две нити, начинающиеся в исходных формулах и оканчивающиеся в различных формулах сечения некоторого сечения, не более чем одна из верхних формул этих нитей содержит собственный логический символ.

1.2. Каков бы ни был $\forall \rightarrow$-вывод по f-переменной, главная формула которого лежит выше формулы сечения в некоторой связке, и нить J, начинающаяся от некоторой формулы A исходной секвенции и проходящая через главную формулу $\forall\varphi F(\varphi)$ этого вывода, всякий собственный $\forall$-квантор по f-переменной в $\forall_\varphi F(\varphi)$ положителен относительно $\forall\varphi F(\varphi)$ и A не содержит собственных логических символов.

А. С. Есенин-Вольпин

7589. Доказательство частного случая основной гипотезы для системы Такеути GLC. Симаути (Proof of a special case of the fundamental conjecture of Takeuti's GLC. Shimauti Takakazu), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 2, 135—144 (англ.)

Формула, входящая в доказательство системы генценовского типа, называется неявной, если она не лежит ни в какой ветви выше некоторой формулы сечения. Вывод (т. е. применение правила вывода) называется неявным, если главная формула этого вывода — неявная.

Доказывается теорема об устранимости сечений для доказательств системы GLC, не содержащих неявных сокращений.

А. С. Есенин-Вольпин

7590. Метаматематическая теорема о функциях. Такэути (A metamathematical theorem of functions. Takeyti Gaisi), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 1, 65—78 (англ.)

В дополнение к системам GLC и G¹LC (реф. 7587) вводится система HLC («иерархическое логическое исчисление»). Эта система является подсистемой G¹LC и содержит те доказательства из G¹LC без связанных функций, которые удовлетворяют следующему условию: каков бы ни был $\forall \rightarrow$-вывод по f-переменной (реф. 7588) этого доказательства, главная формула которого имеет вид $\forall\varphi F(\varphi)$, а боковая — $F(H)$, формула H не содержит $\forall$-квантора по f-переменной.

Для системы HLC доказывается теорема об устранимости сечений. Пусть Γ_0-система аксиом в HLC или G¹LC без связанных переменных функций. Говорят, что Γ_0 содержит аксиому равенства, если Γ_0 содержит $\forall\varphi\forall x\forall y \quad (x=y \supset (\varphi[x] \sim \varphi[y]))$ и $\forall x\,(x=x)$ и для всякого содержащегося в Γ_0 функционала K типа $(i_1, \ldots, i_n; m)$ система Γ_0 содержит формулу

$$\forall\varphi_1 \ldots \forall\varphi_n\forall\psi_1 \ldots \forall\psi_n\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(\varphi_1 \equiv \psi_1 \& \ldots \& \varphi_n \equiv \equiv \psi_n \supset \mathrm{k}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m) = \mathrm{k}\,(\psi_1, \ldots, \psi_n, x_1, \ldots, x_m));$$

здесь $\varphi \equiv \psi$ означает $\forall x_1 \ldots \forall x_i\,(\varphi\,(x_1, \ldots, x_i) \sim \sim \psi\,(x_1, \ldots, x_i))$, где i — число аргументов формул φ и ψ.

Основная теорема: Пусть Γ_0 — система аксиом, непротиворечивая относительно G¹LC, без связанных функций, или относительно HLC. Пусть еще Γ_0 содержит аксиому равенства и в Γ_0 доказуемы следующие секвенции:

$$\Gamma_0 \rightarrow \forall\varphi_1 \ldots \forall\varphi_n\forall x_1 \ldots \forall x_m\exists y F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m, y) \quad \Gamma_0 \rightarrow \forall\varphi_1 \ldots \forall\varphi_n\forall x_1 \ldots \forall x_m\forall y\forall z\ [F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m, y)] \,\&\, F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m, z) \supset y = z).$$

Пусть M — функционал, не содержащийся в Γ_0, и, кроме того, в случае системы HLC, $F(\alpha_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_m, b)$ не содержит $\forall$-квантора по f-переменной. Тогда следующая аксиома непротиворечива относительно Γ_0:

(T) $\forall\varphi_1 \ldots \forall\varphi_n\forall x_1 \ldots \forall x_m F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m, M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m))$.

Заключение этой теоремы справедливо и для генценовской системы LK. Кроме того, в условиях основной теоремы совместимы следующие аксиомы: Γ_0, (T) и

$$\forall\varphi_1 \ldots \forall\varphi_n\forall\psi_1 \ldots \forall\psi_n\forall x_1 \ldots \forall x_m\,(\varphi_1 \equiv \psi_1 \,\&\, \ldots \ldots \,\&\, \varphi_n \equiv \psi_n \supset M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_m) = = M(\psi_1, \ldots, \psi_n, x_1, \ldots, x_m)).$$

Имеются некоторые опечатки. Так, на стр. 67, строка 9 снизу, напечатано «$\varphi \equiv \psi \wedge \ldots \wedge \varphi \equiv \psi$» вместо «$\varphi_1 \equiv \psi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \equiv \psi_n$». (Автор пишет $\wedge$, $\vdash$ и вместо &, $\supset$ и $\sim$ соответственно). На стр. 65, строка 8 снизу, напечатано «$x_m z$» вместо «x_m, z»; на стр. 67, 1 строка снизу, напечатано «,,» вместо «,».

А. С. Есенин-Вольпин

7591 К. Введение в метаматематику. Клини Стефен К. Москва, Изд. ин. лит., 1957, 526 стр., 32 р. 25 к.

Перевод с английского известной монографии автора по теории математических доказательств. Книга состоит из четырех частей и добавлений переводчика.

Первая часть — Проблемы оснований математики (гл. I—III) — носит подготовительный характер и имеет целью ознакомить читателя с ситуацией в области оснований математики, породившей исследования, являющиеся темой остальной части книги. В гл. I кратко изложены основные понятия канторовской теории множеств. В гл. II автор знакомит читателя с некоторыми понятиями и методами математики (натуральное число, функция, принцип математической индукции, аксиоматический метод). В гл. III в общих чертах рассмотрены три направления в основаниях математики: логицизм, интуиционизм и формализм.

Во второй части — Математическая логика (гл. IV—VIII) — изучается формальная система, являющаяся формализацией некоторой части классической арифметики и включающая необходимые для этого логические средства. Автор подробно рассматривает исчисление высказываний и исчисление предикатов, специально подчеркивая результаты, имеющие место в соответствующих интуиционистских исчислениях. Построение арифметики проведено достаточно далеко и завершается изложением обеих теорем Гёделя о неполноте арифметики, причем первая из них дается также в форме Россера.

Третья часть — Рекурсивные функции (гл. IX—XIII) — посвящена теории эффективно вычислимых функций. Подробно рассмотрены примитивно-, общерекурсивные и частично-рекурсивные функции. Изложены многие из результатов самого автора: теорема о нормальной форме, обобщенная форма теоремы Гёделя, теорема о рекурсии, результаты, касающиеся теории рекурсивно перечислимых множеств и т. д. Рассматривается введенное автором понятие относительной рекурсивности, играющее важную роль в теории операторов над рекурсивными функциями и теории сводимости. Обсуждается тезис Чёрча. В гл. XIII автор определяет понятие машины Тьюринга, арифметической функции, вычислимой по Тьюрингу, и показывает, что класс функций, вычислимых по Тьюрингу, совпа-

дает с классом частично-рекурсивных функций. Основываясь на одной неразрешимой массовой проблеме, касающейся машин Тьюринга, автор излагает результат, принадлежащий А. А. Маркову и Посту, о возможности построения ассоциативной системы с неразрешимой проблемой тождества. Обсуждается тезис Тьюринга.

Четвертая часть — Математическая логика (гл. XIV—XV) (дополнительный раздел) содержит обширный материал. В гл. XIV излагаются теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов, теорема Лёвенгейма—Сколема, вопросы, связанные с элиминируемостью описательных определений, парадокс Сколема и другие вопросы. Специальный параграф посвящен теореме Чёрча—Тьюринга о неразрешимости проблемы разрешимости для исчисления предикатов и методу Тарского исследования проблем разрешимости аксиоматических теорий. В гл. XV излагается исчисление секвенций (заключений) Генцена, теорема Генцена о нормальной форме вывода в исчислении секвенций, метод Генцена доказательства непротиворечивости классической арифметики. Дается алгорифм выводимости для интуиционистского исчисления высказываний, опирающийся на теорему Генцена о нормальной форме. В параграфе, посвященном редукции классических систем к интуиционистским, приведено несколько примеров погружающих операций. В заключительном параграфе четвертой части излагается принадлежащая автору теория рекурсивной реализуемости арифметических формул.

Переводчик книги А. С. Есенин-Вольпин в Добавлениях восполнил ряд пропусков в изложении автора, который в нескольких случаях отсылает читателя к монографии Гильберта и Бернайса. Так, в добавлении I воспроизведено недостающее звено в доказательстве второй теоремы Гёделя о неполноте. В добавлении V дается новое доказательство первой и второй ε-теорем Гильберта—Бернайса. В добавлении VII с помощью содержательной трансфинитной индукции до ε_0 доказаны теорема о непротиворечивости классической арифметики и теорема П. С. Новикова о возможности перехода (при выполнении некоторых условий) от классических доказательств существования к интуиционистским. Указывается, что П. С. Новиковым были использованы для этого более сильные средства.

Переводчик и редактор перевода В. А. Успенский сделали также большое число подстрочных примечаний, уточняющих и дополняющих изложение автора. В этих примечаниях нашли отражение не упомянутые автором, а также появившиеся в последнее время работы. Библиография при переводе значительно расширена.

При чтении книги следует иметь в виду ряд неисправленных опечаток:

На стр. 123 в 8 строке снизу вместо A&A должно быть A & ⌝A.

На стр. 228 строки 15—16: убрать слова «натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$».

На стр. 299 в 1 строке средней таблицы пропущено f.

На стр. 355 в 24 строке сверху вместо F & должно быть F^{ϱ} &.

На стр. 362, в лемме 25, требование, указанное в сноске[1] включено в текст ошибочно, т. к. оно соблюдается в силу соглашений § 18.

На стр. 363 строка 17 сверху: $t(x_1, \ldots, x_n)$ следует заменить на $f(x_1, \ldots, x_n)$.

На стр. 462 в формуле (7) следует убрать =0, а в 8 строке снизу после ⊢ вставить B. (Прямой полужирный шрифт употребляется здесь для обозначения плантина — см. стр. 6, строки 2—8 снизу).

На стр. 468 в 12 строке сверху перед $\bar{a}$ следует вставить &, в 16 строке сверху вместо x должно быть Y, а в 21 строке сверху вместо fx должно быть fx.

На стр. 469 в строках 7 и 8 сверху Vb следует заменить на Va, а ⌝a′ = 0 на 0 = 0 & 0 = 0 ⊃ 0 = 0; в строке 8 вместо четырех должно стоять шесть правых скобок после «b».

На той же странице в 12 строке сверху вместо слов «аксиому 15» должно быть 0 = 0 & 0 = 0 ⊃ 0 = 0, а в следующей строке вместо слова «разрешимости» должно быть слово «определения».

На стр. 470 в 30 строке сверху вместо $x = y$ должно быть x = y.

На стр. 472 в формуле (25) вместо e = a должно быть $e' = a$.

На стр. 476 в 18 строке снизу вместо 1 + ay должно быть 1 + au.

На стр. 490 в 13 строке снизу вместо ε_i должно быть ε_1.

Н. М. Нагорный

7592 К. Кризис разума и логика. Бет (La crise de la raison et la logique. Beth E. W., Paris, Gauthier—Villars; Louvain E. Nauwelaerts. 1957, 50 p., ill.) (англ.)

В нескольких публичных лекциях, прочитанных в Льежском университете в мае 1956 г., автор развивает программу возрождения систематической философии. Одним из источников современного иррационализма является интуиционистская концепция математического рассуждения, которая восходит к Декарту и Канту и еще более раннему периоду. В свете последнего анализа эта концепция порождается невозможностью разъяснить математическое рассуждение, пользуясь только средствами формальной логики того времени.

Автор показывает, что современная математическая логика, в особенности если она построена на основе метода семантических таблиц, позволяет обосновать «силлогизм экспозиции», который встречался у Аристотеля, но был отвергнут его комментаторами, и решить знаменитую проблему Локка-Беркли о роли обобщения в математических рассуждениях.

Далее систематическим и полным образом рассматривается метод семантических таблиц; этот метод объединяет преимущества исчисления секвенций или натурального исчисления Генцена и семантического построения логики по Тарскому; в то же время он устанавливает некоторого рода связи между формализованной логикой и здравым смыслом. Автор показывает, что семантический метод применим также к проблеме семантического построения интуиционистской логики.

Книга заканчивается некоторыми философскими заключениями.

А. С. Есенин-Вольпин

См. также: 7697, 7798

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

7593. О приложениях некоторых оценок тригонометрических сумм. Тегем (Sur des applications de certaines estimations de sommes trigonométriques. Teghem J.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège-Paris, 1956, 183—204 (франц.)

Рассматриваются оценки сумм Вейля вида

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)$ — полином или функция, близкая к полиному в некотором смысле, $X \geqslant 1$. Если $f(x)$ — полином степени k, то нетривиальные оценки S рассматриваются в форме: $|S| \leqslant c(k) X^{1-\lambda(k)}$. Дается краткий обзор работ по этому вопросу до 1947 г. (даты появления работы И. М. Виноградова, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1947, 23) — работ И. М. Виноградова, Н. Г. Чудакова, Э. Титчмарша, Ван-дер-Корпута, Хуа Ло-гэна и автора. Указывается на роль $c(k)$ в оценке. Флетт (Flett T. M., Quart. J. Math., 1951, 2, 26—52) на основе указанной работы И. М. Виноградова нашел, что $c(k) = c \exp(18k \ln^2 k)$. Излагаются применения оценок сумм Вейля к задачам о числе решений некоторых диофантовых неравенств. Затем рассматриваются применения к $\zeta(s)$ и $\pi(x)$ в духе Н. Г. Чудакова. Обсуждаются оценки $\zeta(s)$ вблизи единичной прямой и границы области, свободной от нулей $\zeta(s)$ вблизи $\sigma = 1$ ($s = \sigma + it$). Указывается, что роль $c(k)$ весьма велика при этом и что оценку Н. Г. Чудакова: $\pi(x) - \mathrm{li}(x) = O(x \exp\{-A(\ln x)^{3/5-\varepsilon}\})$ ($\varepsilon > 0$) пока не удается улучшить из-за влияния $c(k)$ даже с помощью новейших оценок сумм Вейля, данных И. М. Виноградовым.

Примечание референта. В обзоре истории вопроса автор не приводит работ Н. Г. Чудакова) (Докл. АН СССР, 1936, 1, 177—200; C. r. Acad. sci. Paris, 1936, 202, 171—193; Матем. сб., 1936, 1 (43), 591—602; 799—814) и потому неправ в своем высказывании на стр. 185, что приложение теорем И. М. Виноградова к оценке роста $\zeta(s)$ было независимо осуществлено в 1938—1939 гг. Титчмаршем, Чудаковым и им. Ю. В. Линник

7594. Проблемы и результаты в аддитивной теории чисел. Эрдёш (Problems and results in additive number theory. Erdös P.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège—Paris, 1956, 127—137 (англ.)

Формулируется ряд теорем общей аддитивной теории чисел и связанных с ними новых задач; иногда намечаются доказательства. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность целых чисел; $f(n)$ — число решений уравнений $n = a_i + a_j$ (каждая считается дважды, если $i \neq j$). Основные результаты: 1. Автор и Фукс доказали невозможность соотношения: $\sum_{k=1}^{n} f(k) = cn + o(n^{1/4}(\ln n)^{-1/2})$, что является весьма широким обобщением классического результата Харди и Ландау (Landau E., Zahlentheorie, 1927, 2, 233—239) о целых точках в круге ($a_k = k^2$), с точностью до множителя $(\ln n)^{3/4}$. 2. Построена последовательность $\{a_k\}$ такая, что $0 < f(n) < c \ln n$ ($n > n_0$) и сходные примеры. 3. По заданной $\{a_j\}$ существует $\{b_j\}$ плотности 0 такая, что всякое большое число представимо в виде $a_j + b_j$ (РЖМат, 1956, 1930). Это усилено автором. Гипотеза: если $a_{k+1}/a_k > c > 1$, то $\{a_k\}$ не может быть существенной компонентой. Одна из задач: каково максимальное количество чисел: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant x$ таких, что все $2^k - 1$ сумм $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_r}$ ($1 \leqslant r \leqslant k$; все i_j различны) — различны.

Примечание референта. В формуле (3) на стр. 128 вместо $\pi(n)$ следует πn. Ю. В. Линник

7595. Применение виноровского метода к выводу закона распределения простых чисел в арифметической прогрессии. Глатфельд (Anwendungen der Wienerschen Methode auf den Primzahlsatz für die arithmetische progression. Glatfeld Martin), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 67—73 (нем.)

Известный метод доказательства асимптотического закона распределения простых чисел в натуральном ряду (см., например, Харди Г., Расходящиеся ряды, ГИИЛ,, 1951, § 12) обобщается на арифметические прогрессии. Равенствами

$$g(u) = \sum_{n \leqslant u^{-1}} \chi(n),\ f(u) = \sum_{n \leqslant u} \chi(n)\mu(n)n^{-1}$$

доопределяются для неглавных характеров функции, необходимые в этой теории. К. А. Родосский

7596. Об остаточном члене в элементарном доказательстве теоремы о простых числах. Корпут (Sur le reste dans la démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers. Corput J. G. van der), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège-Paris, 1956, 163—182 (франц.)

Дается упрощение элементарного доказательства теоремы о простых числах Селберга с помощью ослабленного неравенства Селберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, 50, 305—313) и доказательство неравенства для функции Чебышева $\vartheta(x)$: $\vartheta(x)x^{-1} = 1 + O[(\log x)^{-\varepsilon}]$ при $\varepsilon = 1/200$. В. М. Архангельская

7597. Обобщение дзета-функции Эпштейна. Зигель (A generalization of the Epstein Zeta function. Siegel Carl Ludwig), J. Indian Math. Soc., 1956, 20, № 1—3, 1—10 (англ.)

Пусть $S[x]$ — невырожденная четная квадратичная форма от m переменных с сигнатурой n, r; a — вектор такой, что $S[a]$ — целое; d — абсолютное значение детерминанта матрицы S. Положив

$$g_{\rho a} = \sum_{x(\mathrm{mod}\,\gamma)} \exp \pi i \rho S[x+a] \left(\rho = \frac{\alpha}{\gamma},\ (\alpha,\gamma) = 1,\ \gamma > 0\right),$$

$g_a = 1$ для целого a и $g_a = 0$ для дробного a, вводится ряд Дирихле

$$\varphi_a(s) = g_a + \exp[\pi i(n-r)/4]\, d^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{\rho} g_{\rho a} \gamma^{-1-s} (z-\rho)^{(r-1-s)/2} (\bar{z}-\rho)^{(n-1-s)/2},$$

здесь суммируется по всем рациональным числам ρ, $s = \sigma + it$, $\sigma > m/2 + 1$ и $z = \xi + i\eta$, $\eta > 0$. Далее, пусть

$$q(s) = \frac{\pi d^{-1/2} 2^{1+m/2-s} \Gamma(s - m/2)}{\Gamma\{(s+1-n)/2\}\,\Gamma\{(s+1-r)/2\}} \times$$

$$\times \sum_{0 \leqslant \rho < 1} g_{\rho 0} \gamma^{-1-s} \left(\sigma > \frac{m}{2}\right).$$

Доказываются следующие теоремы: 1) Функция $\varphi_a(s)$ мероморфная; 2) для одного вида $S[x]$

$$\varphi_a(s) = \eta^{m/2-s} q(s) \varphi_a(m-s).$$

Г. А. Ломадзе

7598. Об одном обобщении ζ-функции Римана. III. Теорема о среднем значении для $Z_{n,k}(s)$. Мин Сы-Хао (黎曼ζ函數的一種推廣. III. $Z_{n,k}(s)$ 的均值公式. 閔嗣鶴), 數學學報, Шусюэ сюэбао. Acta math. sinica, 1956, 6, № 3, 347—362 (кит.; рез. англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 1334). В тех же обозначениях имеем:

Теорема A. Пусть an — нецелое и $0 < a < k\nu - \nu$,

$\nu = 1/n$, n и k — целые положительные. Тогда (при $\delta \to +0$)

$$\int_0^\infty t^{2a-1} |Z_{n,k}(a+it)|^2 e^{-2\delta t} =$$

$$= c_1 \delta^{-2(n-1)(k\nu-\nu-a)-1}(1+o(1)) + O(\delta^{-2a}) + O(\delta^{-4-\varepsilon}),$$

где $c_1 = k^2 (2\pi)^{1/2} (2\pi\nu)^{-2(k-na-1)} (2\Gamma(1+\nu))^{2k-2} \times$

$\times \Gamma(2(1-\nu)(k-na-1)+1)\zeta(2(k-na))$, ε — любое положительное число.

Теорема B. Пусть an — положительное, но нецелое, и пусть $2(n-1)(k\nu-\nu-a)+1 > \max(2a, 4)$, тогда (при $T \to +\infty$)

$$\int_0^T |Z_{n,k}(a+it)|^2 dt \sim c_3 T^{2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2},$$

где $c_3 = 2^{-2(k\nu-\nu)+1/2}[2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2]^{-1} \times$

$\times \pi^{-2(k-na)+3/2} k^{2\nu^{2na}} \Gamma^2(\nu)\zeta(2(k-na))$.

Г. В. Емельянов

7599. ζ-функция поля эллиптических функций с комплексным умножением. Дейринг (On the zeta-function of an elliptic function field with complex multiplications. Deuring Max), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955. Tokyo, 1956, 47—50 (англ.)

Пусть k — поле алгебраических чисел; $\mathfrak{r}$ — простой дивизор. Дана эллиптическая кривая E: $f(x, y) = 0$; ее образ при проектировании $\mathfrak{r}$ пусть $E/\mathfrak{r}$: $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Полагаем $\zeta(s, E) = \Pi_{\mathfrak{r}} \zeta(s, E/\mathfrak{r})$. Если E имеет комплексное умножение, то известно, что

$$\zeta(s, E) = \zeta(s, k)\zeta(s-1, k) L\left(s-\frac{1}{2}, \chi_E\right) \times$$

$$\times L\left(s-\frac{1}{2}, \bar{\chi}_E\right),$$

где χ_E — характер Гекке. Пусть далее K — поле рациональных функций над кривой E, $\mathfrak{r}^*$ — продолжение $\mathfrak{r}$ на K, $K/\mathfrak{r}^*$ — поле функций над кривой $E\mathfrak{r}$. E называется регулярной над $\mathfrak{r}$, если $E/\mathfrak{r}$ имеет жанр 1 над полем $k/\mathfrak{r}$. Пусть далее $K = k(x, y)$, где $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, $K' = k(x', y')$, $y^2 = 4x^3 - g_2' x - g_3'$, $g_2' = g_2 c^2$, $g_3' = g_3 c^3$, $c \in k$, K и K' эквивалентны бирационально над алгебраическим замыканием k. Автор доказывает следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть K регулярно над $\mathfrak{r}$. K' регулярно над $\mathfrak{r}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{r}$ неразветвлено в $k(\sqrt{c})$.

Теорема 2. Пусть K обладает комплексным умножением, χ и χ' — характеры Гекке поля k, соответствующие K и K'. Тогда

$$\chi'(\mathfrak{r}) = \left(\frac{c}{\mathfrak{r}}\right)^{-1} \chi(\mathfrak{r}),$$

где $(c/\mathfrak{r})$ — обобщенный символ Лежандра поля k,

Теорема 3. Пусть j — сингулярный инвариант, принадлежащий полю k. Тогда для любого конечного $\mathfrak{r}$ поля k существует эллиптическая кривая E, имеющая j своим инвариантом, определенная над k и регулярная над $\mathfrak{r}$.

Н. Г. Чудаков

7600. О системе модулярных функций, связанных с тождествами Рамануджана. Файн (On a system of modular functions connected with the Ramanujan identities. Fine N. J.), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 2, 149—164 (англ.)

Пусть $\eta(\tau) = x^{1/24} \prod_{n \geqslant 1}(1-x^n)$ $(x = \exp 2\pi i\tau,\ 1\tau > 0)$, $q = 6\lambda \pm 1$ ($\lambda > 0$ — целое). Для $k \not\equiv 0 \pmod q$ положим

$$W_k(\tau) = x^{6k^2/q - k} \frac{C_{4k}(x)}{C_{2k}(x)},$$

где $C_k(x) = \prod_{n \geqslant 1}(1-x^{nq-k})(1-x^{nq-q+k})$.

Пусть Γ — модулярная группа, т. е. группа подстановок

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = M\tau,$$

где a, b, c, d — целые числа и $ad - bc = 1$.

Исследуется поведение функции $W_k(\tau)$ по отношению к модулярным подгруппам

$$\Gamma_0(q) : c \equiv 0 \pmod q,$$

$$\Gamma_0^0(q) : b \equiv c \equiv 0 \pmod q,$$

$$\Gamma(q) : a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \pmod q,$$

и доказывается соотношение

$$W_k(M\tau) = \exp\frac{12\pi i k^2 ab}{q} W_{ak}(\tau) \quad (M \in \Gamma_0(q)).$$

Далее даются различные применения развитой теории, в частности доказываются два, до сих пор неопубликованных и недоказанных, тождества Рамануджана.

Г. А. Ломадзе

7601. Построение автоморфных форм от производных данной формы. Ранкин (The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form. Rankin R. A.), J. Indian Math. Soc., 1956, 20, № 1—3, 103—116 (англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная автоморфная форма действительного или комплексного измерения — k, принадлежащая фуксовой группе первого рода Γ с системой мультипликаторов v, т. е. $f(z) \in \{\Gamma, k, v\}$. Для целого r обозначим через v^r систему мультипликаторов, являющуюся r-й степенью v. Положим

$$f_r = \frac{d^r}{dz^r} f(z),\quad h_r = h_r(z) = \frac{f_r}{\Gamma(k+r)\, r!},$$

$$\psi_m = \psi_m(z) = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} h_1 & 2h_2 & 3h_3 \ldots & (m-1)h_{m-1} & mh_m \\ 0 & h_1 & h_2 \ldots & h_{m-2} & h_{m-1} \\ 0 & h_0 & h_1 \ldots & h_{m-3} & h_{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & h_0 & h_1 \end{vmatrix}$$

(m — целое > 2). Далее, обозначим через $P^*_{r,s}(f_0, f_1, \ldots, \ldots, f_n)$ полином от $f(z)$ и ее первых n производных, каждый член которого имеет общую степень r и общий вес s.

Основным результатом является теорема:

Пусть $f(z) \in \{\Gamma, k, v\}$ и k — ни нуль, ни отрицательное целое. 1) Если $P_{r,s}(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in \{\Gamma, rk+2s, v^r\}$, то

$$P_{r,s}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = f_0^{r-s} Q_s(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n),$$

где Q_s — полином от $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ веса s. 2) Обратно, если Q_s — такой полином, то $Q_s \in \{\Gamma, (k+2)s, v^s\}$ и

целое $r \leqslant s$ может быть так выбрано, что $f_0^{r-s}Q_s$ будет полиномом $P_{r,s}$ от $h_0, h_1, \ldots, h_n$, принадлежащим $\{\Gamma, rk+2s, v^r\}$; результат остается справедливым для любого $r > s$, но тогда каждый член $P_{r,s}$ будет делиться на форму f.

Эта теорема показывает, что функции ψ_m вместе с f образуют базис для всех автоморфных форм, являющихся полиномами, или рациональными функциями, от f и ее производных. Г. А. Ломадзе

7602. О C-мажорируемости последовательностей действительных чисел. Эрдёш, Карамата (Sur la majorabilité C des suites de nombres réels. Erdös P., Karamata J.), Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, 10, 37—52 (франц.)

Дается определение: последовательность a_i, $i=1, 2, \ldots$, называется C-мажорируемой с мажорирующей конечной постоянной A, если существует последовательность A_i, $i=1, 2, \ldots$, такая, что $a_i \leqslant A_i$, $i=1, 2, \ldots$, и $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} A_i = A$. Выводятся необходимые и достаточные условия C-мажорируемости, связь с условиями сходимости тауберовских теорем, доказывается, что последовательность $\Lambda(n)$, $n=1, 2, \ldots$, значений функции Мангольдта C-мажорируема, $A=2$. В. М. Архангельская

7603. Некоторые проблемы метрической арифметики. Бардычева М. Ф., Уч. зап. Грозненск. гос. пед. ин-та, 1956, № 7, 61—65

7604. Об одном классе аддитивных арифметических функций, распределенных асимптотически по нормальному закону. Кубилюс И., Fiz.-techn. inst. darbai. Liet. TSR mokslu akad., Tp. Физ.-техн. ин-та. АН ЛитССР, 1956, 2, 5—15 (рез. лит).

$f(m)$ — вещественная сильно аддитивная функция,

$$A_n = \sum_{p\leqslant n} \frac{f(p)}{p}, \quad B_n = \left(\sum_{p\leqslant n} \frac{f^2(p)}{p}\right)^{1/2}$$

(p — простые числа). $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$, a — фиксированное целое $\geqslant 1$. $N_n\{\ \}$ — количество натуральных чисел, не превосходящих n, обладающих свойством, указанным в скобке. Доказывается теорема: Пусть при $n\to\infty$ $B_n\to\infty$, $\Lambda_n = \max_{p\leqslant n}|f(p)| = o(B_n)$; для достаточно большого $n \geqslant n_0$ и всех x (n_0 не зависит от x) справедлива равномерная по $n \geqslant n_0$ и x оценка:

$$\frac{1}{n} N_n\left\{\frac{f(m)-A_n}{B_n} < x\right\} = G(x) + O\left(\frac{\Lambda_n}{B_n}\Delta(n, x)\right),$$

$$\frac{1}{n} N_n\left\{\frac{f(m)-f(m+a)}{\sqrt{2}\,B_n} < x\right\} = G(x) + O\left(\frac{\Lambda_n}{B_n}\Delta(n, x)\right),$$

где $\Delta(n, x) = e^{-x^2/2}\ln^2\frac{B_n}{\Lambda_n} + \min\left(1, \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{B_n}{\Lambda_n}\right)$.

А. Г. Постников

7605. Основные проблемы геометрии чисел. Мюллер (Die Grundprobleme der Geometrie der Zahlen. Müller Claus), Math.-phys. Semesterber., 1956., 5, № 1—2, 63—70 (нем.)

Популярный обзор элементарных теорем геометрии чисел. Даны два доказательства теоремы Минковского о выпуклом теле на плоскости (из них одно с помощью рядов Фурье — вариант доказательства Зигеля (Siegel C. L., Acta math., 1935, 65, 307—323)) и проблема асимптотического счета целых точек в круге.

Примечание референта. На стр. 68 в лемме 4 и формуле (21) ошибка: нужно $\iint_G L^2(x, y)\,dxdy$ вместо $\iint_G L(x, y)\,dxdy$, и поэтому дальнейшие выводы непосредственно не проходят. Ю. В. Линник

7606. О наиболее плотном расположении на гиперсфере сферических сегментов. Блох Э. Л., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 5, 707—712

Дается верхняя оценка для коэффициента заполнения поверхности гиперсферы при наиболее плотном расположении на ней сферических сегментов с углом раствора 2θ. Полученная оценка является более точной, чем оценка Шаботи, при $\theta \leqslant \pi/6$. Только при $\theta \to \pi/4$ оценка Шаботи точнее (РЖМат, 1954, 1047). В. А. Голубев

7607. Оценка для фундаментального решения обобщенного уравнения Пелля. Чок (An estimate for the fundamental solutions of a generalized Pell equation. Chalk J. H. H.), Math. Ann., 1956, 132, № 3, 263—276 (англ.)

Для классического уравнения Пелля $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ ($\sigma = 1, 2$) оценки фундаментального решения $(T + U\sqrt{D})/\sigma$ были даны И. Шуром и Э. Ландау в 1918 г. Автор переносит их метод на обобщенное уравнение Пелля $t\bar{t} - Du\bar{u} = 1$, $t, u \neq 0$ — целые числа Гаусса. Доказывается теорема: существуют гауссовы целые решения этого уравнения, где $|t| \leqslant 1 + D\prod_{p|D,\, p>2}(1 + (-1/p)(1/p))$. При этом используется аппарат теории фуксовых групп и оценка числа производящих элементов этих групп, данная Зигелем (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, 46, 708—718) и Цуджи (Tsuji M., Japan J. Math., 1951, 21, 1—27). Ю. В. Линник

7608. Об иррегулярных отрицательных детерминантах степени $9n$. Портер (On irregular negative determinants of exponent $9n$. Porter R. J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, 10, № 53, 22—25 (англ.)

Дана таблица 58 отрицательных детерминантов, делящихся (кроме $D = -3299$) на 9 и меньших 150 000 по абсолютной величине. Каждый из них имеет 13 классов квадратичных форм. Эти классы указаны для 4 детерминантов. В. А. Голубев

7609. О числе классов идеалов в немаксимальных порядках $\mathfrak{p}$-адических алгебр с делением. Дженнер (On the class number of non-maximal orders in $\mathfrak{p}$-adic division algebras. Jenner W. E.), Math. scand., 1956, 4, № 1, 125—128 (англ.)

Пусть $\mathfrak{O}$ — произвольный порядок в алгебре с делением $\mathfrak{D}$ конечного ранга над $\mathfrak{p}$-адическим полем. Правые (левые) $\mathfrak{O}$-идеалы A и B называются эквивалентными, если $A = \lambda B$ ($A = B\lambda$) при $\lambda \in \mathfrak{D}$, $\lambda \neq 0$. Доказывается, что число классов правых $\mathfrak{O}$-идеалов конечно и равно числу классов левых $\mathfrak{O}$-идеалов. Далее, если $\mathfrak{O}$-порядок в полупростой алгебре над $\mathfrak{p}$-адическим полем, то существует только конечное число классов унимодулярно эквивалентных целых представлений кольца $\mathfrak{O}$ данной степени. Отсюда вытекает, что для конечной группы имеется только конечное число унимодулярно неэквивалентных целых $\mathfrak{p}$-адических представлений данной степени. З. И. Боревич

7610. Некоторые вычислительные проблемы в алгебраической теории чисел. Таусски (Some computational problems in algebraic number theory. Taussky Olga), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York—Toronto—London, 1956, 187—193 (англ.)

Рассматриваются проблемы эффективного вычисления (без обсуждения вопросов программирования) некоторых параметров в классической алгебраической теории чисел. Сюда относятся задачи факторизации рациональных простых чисел p с помощью факторизации соответствующих полиномов по модулю p, вычисление единиц алгебраических полей. На машине CEAK (SEAC) вычислены базисные единицы поля $k(\sqrt{p})$, p — простое: $(t+u\sqrt{p})^2$; проверена до $p<10^5$ гипотеза Анкени, Артина и Чоула, о том что при $p\equiv 5 \pmod 8$ $u \not\equiv 0 \pmod p$. Указаны некоторые случаи вычисления числа классов идеалов в циклотомных и других абелевых полях, с помощью ряда А. Шольца (Scholz A., J. reine und angew. Math., 1929, 161, 201—207) и автора (J. London Math. Soc,. 1937, 12, 86—88). Описаны некоторые вычисления, связанные с теоремой Гильберта (Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, vol. 1, Berlin, 1932, теорема 94).

Ю. В. Линник

7611. О некоторых типах характеров группы классов иделей в полях алгебраических чисел. Вейл (On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field. Weil André), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 1—7 (англ.)

k — поле алгебраических чисел конечной степени; k^* — его мультипликативная группа; I_k — группа иделей поля k, $\tau_\lambda = 1$ для $\lambda = 1, 2, \ldots, r_1$; $\tau_\lambda = 2$ для $\lambda = r_1+1, \ldots, r_1+r_2$. Если $a \in I_k$, то $a = (a_v)$, где a_v — компонента a по простому дивизору v поля k; $\mathfrak{a} = (a)$ — идеал, определяемый элементом a.

Пусть $\chi(a)$ — любой характер группы I_k, т. е. гомоморфизм I_k в C^*, где C^* — мультипликативная группа всех комплексных чисел. Этот характер можно записать так:

$$\chi(a) = \psi(b) \prod_\lambda (b_\lambda / |b_\lambda|)^{-f_\lambda} |b_\lambda|^{\eta_\lambda(\sigma + i\varphi_\lambda)},$$

где σ, φ_λ — вещественные числа, идель $b = b(a)$.

Автор показывает, что если все $\varphi_\lambda = 0$, а σ — рациональные числа, то все значения $\chi(a)$ — алгебраические числа; если же $\psi(a) = \pm \prod \alpha_\lambda^{r_\lambda} \bar{\alpha}_\lambda^{s_\lambda}$, где целое $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$, r_λ, s_λ — целые рациональные числа, $\mathfrak{f}$ — ведущий модуль $\chi(a)$, то все $\chi(a)$ принадлежат конечному расширению поля рациональных чисел.

Этот результат автор переносит на характеры Гекке $\chi(\mathfrak{a})$, которые связаны с $\chi(a)$ и используются затем в теории абелевых многообразий с комплексным умножением.

Н. Г. Чудаков

7612. К теории дедекиндовых сумм. Радемахер (Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Rademacher Hans), Math. Z. 1956, 63, № 5, 445—463 (нем.)

Для пары целых взаимно простых чисел h, k ($k>0$) функция $s(h, k)$ (дедекиндова сумма) определяется так: $s(h, k) = \sum_{\mu \bmod k} ((\mu/k))((h\mu/k))$, где $((x)) = 0$ для целых x, и $((x)) = x - [x] - 1/2$ в остальных случаях. Работа состоит из трех разделов. В разделе I рассматриваются некоторые свойства функции $s(h, k)$, из которых отметим следующее. Если функция $s'(\varrho)$ определена для каждого рационального $\varrho = h/k$ (где $(h/k)=1$, $k>0$) соотношением $s'(\varrho) = s(h, k)$, то $s'(\varrho)$ не ограничена ни сверху, ни снизу в любом интервале. Раздел II посвящен приложениям функции $s(h, k)$ к теории подстановок модулярной группы Γ. Именно, в терминах функции $s(h, k)$ определяется некоторая целочисленная функция $\Psi(M)$ подстановки M из Γ, оказывающаяся инвариантом класса, которому принадлежит M. Далее показывается, что этот инвариант можно очень просто истолковать следующим образом. Пусть $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда во всяком классе подстановок из Γ содержится подстановка одного из следующих четырех типов: $\pm T$, $\pm U$; $\pm U^{-1}$; $\pm TU^{\varepsilon_1}TU^{\varepsilon_2} \ldots TU^{\varepsilon_\nu}$, где $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, \ldots, \ldots, \nu$, и значение инварианта Ψ определяется формулами $\Psi(\pm T) = 0$, $\Psi(\pm U) = -2$, $\Psi(\pm U^{-1}) = 2$, $\Psi(\pm TU^{\varepsilon_1}TU^{\varepsilon_2} \ldots TU^{\varepsilon_\nu}) = \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j$. В разделе III рассматриваются квадратичные формы с определителем вида m^2-4. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между такими формами и подстановками $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из Γ, у которых $a+d=m$. Классам подстановок соответствуют при этом классы собственно эквивалентных форм. Тем самым инвариант Ψ определяет некоторый инвариант класса собственно эквивалентных форм (приводится пример, показывающий, что он не является родовым инвариантом). В заключение полученная связь функции $s(h, k)$ с разбиением квадратичных форм на классы используется для явного нахождения $s(h, k)$ в ряде случаев, когда h и k удовлетворяют некоторым условиям сравнимости. Например, доказывается, что если $k \equiv 1 \pmod 3$ или $k \equiv -3 \pmod 9$ и $(h-2)^2 \equiv 3 \pmod k$, то $s(h, k) = (1-k)/3k$.

В. Б. Демьянов

7613. О некоторых типах матриц. Лемер (On certain matrices. Lehmer D. H.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 3, 491—499 (англ.)

Рассматриваются два типа целочисленных квадратных матриц: матрица $M = M(a, b, c, d)$ порядка $p-1$, составленная из элементов вида

$$a_{ij} = a + b\chi(i) + c\chi(j) + d\chi(ij),$$

и матрица $A_p = A_p(c, \alpha)$ с элементами $a_{ij} = c + \chi(\alpha + i + j)$, где a, b, c, d, α — заданные целые числа, p — нечетное простое число, а $\chi(n)$ — обобщенный символ Лежандра с основным модулем p.

Доказываются:

1. Для любого целого положительного k степень M^k матрицы M определяется элементами

$$a_{ij}^{(k)} = (p-1)^{k-1}\{a_k + b_k\chi(i) + c_k\chi(j) + d_k\chi(ij)\},$$

где

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k.$$

2. Матрица M имеет характеристические числа

$$(p-1)\rho_1,\ (p-1)\rho_2,\ 0,\ \ldots,\ 0,$$

где ρ_1, ρ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.

Аналогичные факты доказываются и для матрицы A_p. В конце дается доказательство тождества

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(m+k)\chi(n+k) = \delta_m^n - \chi(m)\chi(n) - 1,$$

где δ_m^n — символ Кронекера по mod p.

Б. М. Уразбаев

7614. О неопределенных уравнениях 4-й степени с равным нулю квадратичным инвариантом. Подсыпанин В. Д., Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та. 1954, вып. 5, 185—189

Дается способ перехода от неопределенного уравнения 4-й степени с равным нулю квадратичным инвариантом к неопределенному уравнению 3-й степени, которое уже можно часто решить до конца. В качестве

примера дано подробное решение уравнения $\varphi(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + 10xy^3 - 3y^4 = 1$, имеющего пару целочисленных решений. В. А. Голубев

7615. Проблемы Эскотта-Тарри и Пруе-Тарри. Паламà (I problemi di Escott-Tarry e di Prouhet-Tarry. Palamà Giuseppe), Giorn. mat. Battaglini, 1956, 84, № 2, 189—247 (итал.)

Первая часть статьи посвящена обзору результатов по решению проблемы Эскотта-Тарри (РЖМат, 1955, 52, 615). Эта проблема заключается в отыскании целых нетривиальных решений многостепенной системы уравнений:

$$x_1^k + \ldots + x_p^k = y_1^k + \ldots + y_p^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Такие решения возможны, если $n(n+1)/2 + 1 \geqslant p \geqslant n+1$, и рекуррентный переход от n к $n+1$ дан Тарри и Эскоттом. Если $p = n+1$, то системы называются идеальными. Эти системы подробно рассматриваются во 2-й главе работы. Дана большая библиография. В. А. Голубев

7616. О некоторых специальных системах уравнений. Корсон (On some special systems equations. Corson H. H.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 3, 449—452 (англ.)

Рассматриваются варианты следующих систем уравнений. Даны: некоторое поле F и система таких уравнений, которые, после решения их относительно двух неизвестных, принимают вид

$$x_1^{k_1} = f(x_3, \ldots, x_n), \quad x_2^{k_2} = g(x_3, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где f и g — некоторые функции указанных переменных. Рассмотрим еще уравнение

$$y^{k_1 k_2} = f^{sk_2}(y_3, \ldots, y_n)\, g^{rk_1}(y_3, \ldots, y_n). \qquad (2)$$

Доказана теорема 1: Если $(k_1, k_2) = 1$, $rk_1 + sk_2 = 1$, то различные решения уравнений (1) в F с $x_1x_2 \neq 0$ могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с различными решениями уравнения (2) в F при $y \neq 0$. Из решений (1) могут быть получены решения (2) и обратно при помощи данного преобразования.

Дано конечное поле $GF(q)$, $q = p^t$. Для этого случая доказана теорема 2: Если f и g — однородные многочлены степеней m_1 и m_2, $(m_1, k_1) = 1$, $(m_2, k_2) = 1$, то общее число решений системы (1) в поле $GF(q)$ равно q^{n-2}. В. А. Голубев

7617. Обобщение теоремы Вилсона. Элстон (A generalization of Wilson's theorem. Elston Fred G.), Math. Mag., 1957, **30**, № 3, 159—162 (англ.)

С помощью индукции установлено сравнение

$$r!\,(p-r-1)! \equiv (-1)^{r+1} \pmod p,$$

где p — простое число и $r \geqslant 0$ — целое. В случае $r = 0$ здесь содержится известный критерий Вилсона, который при испытании на простоту числа p предлагается заменить таким

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p.$$

Примечание референта. Указанное обобщение теоремы Вилсона известно (см., например, РЖМат, 1955, 62). А. Ф. Лаврик

7618. Доказательства для двух теорем Шерка относительно простых чисел. Тёйффель (Beweise für zwei Sätze von H. F. Scherk über Primzahlen. Teuffel E.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 58, № 2, 43—44 (нем.)

Пусть $P_m = \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu$, где через p_ν обозначено ν-е простое число, причем $p_1 = 1$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ справедливо утверждение: всякое четное число $2k$, удовлетворяющее условию $0 \leqslant 2k \leqslant P_{2n-1}$, может быть представлено в виде $2k = p_{2n-1} + \sum_{\nu=1}^{2n-2} \varepsilon_\nu p_\nu$, где $\varepsilon_\nu = \pm 1$ ($\nu = 1, \ldots, 2n-2$). Доказательство получается элементарным путем из того известного факта (постулата Бертрана, доказанного Чебышевым), что при $a \geqslant 2$ всегда имеется простое число p, для которого $a \leqslant p < 2a$. Из теоремы автора, как простые следствия, вытекают две теоремы, высказанные без доказательства Шерком еще в 1833 г. В. Б. Демьянов

7619. Еще одно доказательство бесконечности простых чисел. Гаррис (Another proof of the infinitude of primes. Harris V. C.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 10, 711 (англ.)

Данное доказательство бесконечности простых чисел основано на том, что при $n \geqslant 3$ все числа $A_n = A_0A_1 \ldots A_{n-3}A_{n-1} + A_{n-2}$ являются попарно взаимно простыми, если только A_0, A_1, A_2 взяты попарно взаимно простыми. В. А. Голубев

7620. Заметка о теореме Штаудта-Клаузена. Карлиц (A note on the Staudt-Clausen theorem. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 1, 19—21 (англ.)

Для коэффициентов R_n, определяемых разложением

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{x^n}{n!} = \log \frac{1 - e^{-x}}{x},$$

устанавливаются некоторые сравнения. Приведем одно из них. Пусть $p \geqslant 3$ обозначает простое число, r — наибольшее целое при условии $p^r \mid 2m$ и $p - 1 \mid 2m$. Тогда $p^{r+1}R_{2m} \equiv p^r (p-1)/2m \pmod{p^{r+1}}$.

А. Ф. Лаврик

7621. О некоторых формулах из теории непрерывных дробей. Мартин-Хадраке (Sobre unes formulas de fracciones continuas. Martin Jadraque V.), Gac. mat., 1956, **9**, № 4—5, 148—154 (исп.)

Устанавливается справедливость тождеств

$$v_1x + v_2x^2 + \ldots + v_nx^n \equiv \frac{v_1x}{1 -} \frac{v_2x}{v_1 + v_2x -} \cdots \frac{v_{n-2}v_nx}{v_{n-1} + v_nx},$$

$$\frac{x}{v_1} + \frac{x^2}{v_2} + \ldots + \frac{x^n}{v_n} \equiv \frac{x}{v_1 -} \frac{v_1^2x}{v_1x + v_2 -} \cdots \frac{v_{n-1}^2x}{v_{n-1}x + v_n},$$

$$\frac{r_1}{s_1}x + \frac{r_1r_2}{s_1s_2}x^2 + \ldots + \frac{r_1r_2 \ldots r_n}{s_1s_2 \ldots s_n}x^n \equiv$$

$$\equiv \frac{r_1x}{s_1 -} \frac{s_1r_2x}{s_2 + r_2x -} \cdots \frac{s_{n-1}r_nx}{s_n + r_nx},$$

причем для непрерывных дробей используются обозначения:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{b_n}{a_n}}}} = \frac{b_1}{a_1 -} \frac{b_2}{a_2 -} \cdots \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} -} \frac{b_n}{a_n}.$$

Э. Апарисио

7622. Сумма, связанная с квадратичными вычетами. Карлиц (A sum connected with quadratic residues.

Carlitz L.), Nagoya Math. J., 1956, **10**, June, 1—7 (англ.)

Доказывается, что если

$$S_m(a) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \left(\frac{r+a}{p}\right)\left(\frac{m}{r}\right),$$

где $((r+a)/p)$ — символ Лежандра, $p = 2k+1$ — простое число, то при любых целых a и $m > 0$ имеет место сравнение

$$p^{-h} S_m(a) \equiv -(-1)^k / k! \pmod{p},$$

где целое h определяется неравенствами

$$(h-1)(p-1) < m - \frac{1}{2}(p-1) \leqslant h(p-1).$$

Э. Апарисио

7623. Элементарное доказательство закона взаимности квадратичных вычетов в поле Гаусса. Какигава, (Gauss 體における平方剩 余の相互法則の初等的道明. 恒川實), 數學, Сугаку, 1955, **7**, № 1, 23—24 (японск.)

Пусть K — кольцо гауссовых целых, а π и k означают простые числа из K, $\pi \equiv 1$, $k \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$. Символ $[k/\pi]$ означает ± 1 в зависимости от того, разрешимо сравнение $x^2 \equiv k \pmod{\pi}$ или нет. Элементарно доказывается:

$$\left[\frac{i}{\pi}\right] = \begin{cases} +1, \text{ если } \pi \equiv 1 \\ \\ -1, \text{ если } \pi \equiv -1-2i \end{cases} \pmod 4;$$

$$\left[\frac{1+i}{\pi}\right] = \begin{cases} +1, \text{ если } \pi \equiv 1, \ -1+2i \\ \\ -1, \text{ если } \pi \equiv -3, \ -1-2i \end{cases} \pmod{4+4i},$$

$$\left[\frac{k}{\pi}\right]\left[\frac{\pi}{k}\right] = 1.$$

Hua Loo-keng

7624. К уравнению $x^n + y^n = z^n$. Эберг (Sur l'équation $x^n + y^n = z^n$. Öberg T.), Mathesis, 1956, **65**, № 10, 542—543 (франц.)

Указывается на связь между вопросом о разрешимости в целых числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ и некоторого целочисленного трехчленного неоднородного уравнения степени $2n$. П. Н. Реморов

7625. Экскурс в теорию чисел. Лефевр (Incursion dans la théorie des nombres. Lefevre A.), Bull. Assoc. ingrs issus École applic. artill. et génie, 1956, **34**, № 4, 45—49 (франц.; рез. флам.)

7626. Рекуррентные последовательности с двумя членами. Цеккендорф (Les suites récurrentes à 2 termes. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, **25**, № 11, 574—584 (франц.)

См. также: 7713, 7965

АЛГЕБРА

7627. О работе алгебраического семинара при Уральском государственном университете им. А. М. Горького. Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 255—260

Перечень и краткое содержание докладов, прочитанных на семинаре за последние два года:

1. П. Г. Конторович, Некоторые вопросы теории полугрупп в группах (РЖМат, 1956, 5121). 2. Б. И. Плоткин, О ниль-группах без кручения (РЖМат, 1954, 5448). 3. К. М. Кутыев, О регулярных структурно упорядоченных группах. 4. Б. И. Плоткин, О структурных изоморфизмах разрешимых R-групп (РЖМат, 1955, 90). 5. В. С. Чарин, Об автоморфизмах групп конечного ранга (РЖМат, 1955, 3082). 6. А. Д. Кацман, К теории Ф-подполугрупп. 7. А. В. Бояринцев, Некоторые критерии простоты натуральных чисел. 8. Н. Ф. Сесекин, А. И. Старостин, О локально конечной группе, все силовские p-подгруппы которой локально циклические (РЖМат, 1956, 222). 9. Н. А. Шумихина, О некоторых теоретико-множественных покрытиях тел. 10. Б. И. Плоткин, О некоторых классах обобщенных разрешимых групп и алгебр Ли. 11. А. Д. Кацман, К теории полугрупп в группах. 12. К. М. Кутыев, К теории частично упорядоченных групп. 13. П. Г. Конторович, О типах элементов в полугруппе. 14. В. А. Байдосов, О слабых структурах. 15. Е. Крейндлер, О структурах с аддитивным базисом. 16. Н. Ф. Сесекин, О. С. Пахорукова, Об одном классе разрешимых групп. 17. Б. И. Плоткин, О некоторых классах бесконечных групп. 18. Х. Х. Мухаммеджан, К теории специальных групп. 19. М. Л. Берлинков, О компактных структурах.

7628 К. Практическая алгебра. Дёрри (Praktische Algebra. Dörrie Heinrich. München, R. Oldenbourg, 1955, VIII, 259 S., 24.00 DM.) (нем.)

Элементарный учебник, посвященный решению алгебраических уравнений. После первых четырех вводных глав, посвященных теореме существования корня, теории делимости, симметрическим многочленам и некоторым специальным уравнениям, следуют четыре главы об оценке и вычислении корней алгебраических уравнений. В частности, одна глава посвящена уравнениям, имеющим только действительные корни. Книга содержит 102 задачи с решениями, касающиеся, в основном, алгебраических тождеств и специальных многочленов с действительными корнями. Некоторые из этих результатов, хотя и не новы, но могут быть интересны многим читателям. O. Taussky-Todd

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 523.

7629 К. Лекции по высшей алгебре. Введение в абстрактную алгебру. Бочкарев Д. Саранск, 1954 (1955), 275 стр., 5 р. 50 к.

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7630. Обобщенные возвратные уравнения. Паламà (Equazioni reciproche in senso generale. Palamà G.), Giorn. mat. Battaglini, 1955, **83**, № 2, 189—210 (итал.)

Уравнение с действительными коэффициентами

$$\varphi(x) = 0, \text{ где } \varphi(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} \quad \ldots + A_m,$$

называется обобщенным возвратным уравнением, если $\varphi(x) = K x^m \varphi(\lambda/x)$, где λ и K — некоторые действительные числа (впрочем, как легко видеть, $K = \pm \lambda^{-m/2}$, так что при $\lambda < 0$ степень m четна).

Такое уравнение наряду с корнем α имеет корень λ/α, а его коэффициенты связаны соотношениями

$$A_{m-r} = \pm A_r \lambda^{\frac{m-2r}{2}} \quad \left(r = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]\right). \qquad (1)$$

После освобождения уравнения $\varphi(x) = 0$ от возможных корней $\sqrt{\lambda}$ и $-\sqrt{\lambda}$ остается уравнение четной степени $2k$, для которого в соотношениях (1) имеет место знак $+$. Такое уравнение делением на x^k и подстановкой $y = x + \frac{\lambda}{x}$ сводится к уравнению степени k (называемому резольвентой исходного уравнения).

Автор устанавливает общий вид обобщенных возвратных уравнений степени $2^n k$, для которых $n-1$ последовательных резольвент степеней $2^{n-i}k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, также являются обобщенными возвратными уравнениями (с данными числами λ).

А. Г. Школьник

7631. Признак неприводимости многочленов. Эренфёйхт (Kryterium absolutnej nierozkładalnosci wielomianów. Ehrenfeucht A.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 1, 2, № 1, 167—169 (польск.; рез. русск., англ.)

Доказана следующая (по-видимому, новая) теорема: Если $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$, ..., $U_n(x_n)$ — многочлены с комплексными коэффициентами, имеющие взаимно простые (в совокупности) степени, то многочлен от n неизвестных $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_i)$ неприводим над полем комплексных чисел. Доказательство элементарно.

St. Knapolski

7632. О представлении симметрических функций через степенные суммы. Островский (Über die Darstellung von symmetrischen Funktionen durch Potenzsummen. Ostrowski Alexander), Math. Ann., 1956, 132, № 4, 362—372 (нем.)

Пусть $[p_1, \ldots, p_r] = \sum x_1^{p_1} \ldots x_r^{p_r}$, где $p_1, \ldots, p_r$ — положительные действительные числа, а сумма в правой части содержит $n(n-1)\ldots(n-r+1)$ членов, получающихся в результате замены переменных $x_1, \ldots, x_r$ переменными $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ из системы $x_1, \ldots x_n$ ($n \geqslant r$). Оказывается, что имеет место следующее символическое равенство:

$$[p_1, \ldots, p_r] = \begin{vmatrix} s_1^{(p_1)} & \ldots & s_r^{(p_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{(p_r)} & \ldots & s_r^{(p_r)} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где $s_p = x_1^p + \ldots + x_n^p$. Это равенство нужно понимать так, что каждому члену $\pm s_1^{(p_{i_1})} \ldots s_r^{(p_{i_r})}$ определителя (1) сопоставляется разложение $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ 1 & \ldots & r \end{pmatrix} = C_1 \ldots C_m$ на независимые циклы подстановки его индексов и этот член заменяется произведением $(-1)^{r-m} s_{c_1} \ldots s_{c_m}$, где $C_i = p_{j_1} + \ldots + p_{j_t}$, если $C_i = (j_1, \ldots, j_t)$. Сумма всех коэффициентов при произведениях $s_{c_1} \ldots s_{c_m}$ в правой части формулы (1) равна нулю для $n > 1$, а сумма их абсолютных величин равна $r!$ (для $r \geqslant 1$).

С. Д. Берман

7633. О некоторых соотношениях, остающихся верными, если переставляются входящие в них операции. Митринович (Sur certaines relations restant valables si l'on permute les operateurs y intervenant. Mitrinovitch Dragoslav S.), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 1—2, 15—22 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Для произвольных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доказывается соотношение:

$$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum \min a_i - \sum \min(a_i, a_j) + \sum \min(a_i, a_j, a_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \min(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

которое остается верным и при перестановке знаков max и min. Из этого соотношения выводятся аналогичные (но уже мультипликативные) соотношения для наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя n целых чисел. Эти соотношения также остаются верными при перестановке операций взятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

Как указывает автор, эти результаты (другим методом) были ранее получены Клейн-Барменом (Klein-Barmen F., Math. Ann., 1931, 105, S. 308—323).

В. Г. Калагастов

7634. Заметка об одном q-тождестве. Карлиц (Note on a q-identity. Carlitz L.), Math. scand., 1955, 3, № 2, 281—282 (англ.)

Доказывается, что некоторые тождества для биномиальных коэффициентов (в частности, формула Фьельстада; РЖМат, 1955, 3278) остаются справедливыми после замены факториалов и биномиальных коэффициентов их «q-аналогами»

$$[r]! = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r), \quad \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right] = \frac{[n]!}{[r]!\,[n-r]!}.$$

А. Г. Школьник

7635. О произвольных системах линейных уравнений в полупростых кольцах. Кертес (On arbitrary systems of linear equations over semi-simple rings. Kertész A.), Bull. Acad. polon. sci., 1955, Cl. III, 3, № 2, 74—75 (англ.); Бюл. Польской АН, 1955, Отд. 3, 3, № 2, 73—74

Пусть

$$f_\beta \equiv a_{\beta 1} x_{\alpha_1} + \ldots + a_{\beta k} x_{\alpha_k} = b_\beta, \qquad (1)$$

— вообще говоря, бесконечная система линейных уравнений над ассоциативным кольцом R от некоторого, быть может, также бесконечного, множества неизвестных x_α. Система линейных уравнений (1) называется совместной, если каждое левостороннее линейное соотношение над кольцом R для произвольного конечного подмножества линейных форм f_β остается справедливым и для соответствующих многочленов $f_\beta - b_\beta$. Кольцо R допускает классическую теорию линейных уравнений, если каждое решение произвольной совместной системы линейных уравнений (1) над кольцом R представимо в виде

$$x_\alpha = c_\alpha + \sum_{j=1}^{m_\alpha} d_{\alpha j} t_{\alpha j},$$

где c_α — элемент левого идеала кольца R, порождаемого свободными членами b_β, $d_{\alpha j} \in R$, $\{t_\gamma\}$ — система параметров, могущих принимать произвольные значения из кольца R, и m_α — некоторое натуральное число. Формулируется теорема: Кольцо R допускает классическую теорию линейных уравнений тогда и только тогда, когда оно полупростое. (Под полупростым кольцом автор везде понимает полупростое кольцо с условием минимальности для левых идеалов).

В качестве следствий теоремы формулируются следующие утверждения: 1) Произвольная система линей-

ных уравнений над полупростым кольцом R тогда и только тогда допускает решение в R, когда каждая конечная подсистема имеет решение в R. 2) Каждая система линейных уравнений над полупростым кольцом содержит максимальную совместную подсистему. Доказательства всех приведенных в статье утверждений должны быть опубликованы позднее.

Е. Г. Шульгейфер

7636. Взаимный определитель и определитель из алгебраических дополнений. Натуччи (Determinante reciproco e determinante degli aggiunti (o aggiunto). Natucci Alpinolo), Archimede, 1956, 8, № 3, 140—142 (исп.)

Излагаются известные факты из теории определителей.

Э. Апарисио

7637. Заметка об определителях с двучленными элементами. Гхош (A note on determinants with binomial elements. Ghosh N. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 1, 23—25 (англ.)

Доказано, что если $|A| \neq 0$, то для любой матрицы B.

$$|A + B| = (1 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n)|A|, \qquad (1)$$

где I_r — сумма всех диагональных миноров n-го порядка матрицы $C = BA^{-1}$. Аналогичная формула имеет место и для миноров матрицы $A + B$.

Из формулы (1) вытекает, в частности, что уравнение $|A + \lambda B| = 0$ равносильно уравнению

$$\lambda^n I_n = \lambda^{n-1} I_{n-1} + \ldots + \lambda I_1 + 1 = 0.$$

А. Г. Школьник

7638. Разложение некоторых определителей, имеющих применение в технике. Бородянский М. Я., Тр. Киевск. технол. ин-та пищ. пром-сти, 1955, вып. 15, 254—264

Некоторые матрицы, встречающиеся при решении задач устойчивости рам, преобразуются к диагональному виду. Например симметрическая квадратная матрица $A = \| a_{ik} \|$, элементы которой удовлетворяют условиям:

$$a_{ik} = a_{i+m,k+m}, \quad a_{i,i+m} = a_{i,i-m},$$

где m — любое целое число, преобразуется с помощью матрицы $v = \| v_{ik} \|$

$$v_{ik} = \begin{cases} (-1)^{i(k-1)} & (i = 1,\ 2), \\ \sin \dfrac{2(i-1)(k-1)\pi}{2n} & (i = 3,\ 5,\ 7, \ldots), \\ \sin \dfrac{n - 2(i-2)(k-1)\pi}{2n} & (i = 4,\ 6,\ 8, \ldots) \end{cases}$$

к диагональной матрице $P = VAV'$, для которой

$$p_{ii} = \frac{n}{2} \sum_{\gamma=1}^{n} a_\gamma \cos \frac{(\gamma - 1)(i-1)\pi}{n}$$

Примечание референта. Местами изложение недостаточно отчетливо. Например, непонятно, что имеет в виду автор, когда говорит о «номере пары строк».

А. Г. Школьник

7639. Неравенства для миноров и характеристических чисел. Брёйн (Inequalities concerning minors and eigenvalues. Bruijn N. G. de), Nieuw arch. wiskunde, 1956, 4, № 1, 18—35 (англ.)

Обзорная статья, содержащая ряд новых неравенств, из которых в первую очередь следует отметить следующие:

$$g_k^2(A_1 \ldots A_m) \leqslant f_k(A_1 A_1^*)\varphi_k(A_2 A_2^*) \ldots$$

$$\ldots \varphi_k(A_{m-1} A_{m-1}^*) f_k(A_m^* A_m) \qquad (m \geqslant 2),$$

$$\varphi_k^2(A_1 \ldots A_m) \leqslant \varphi_k(A_1 A_1^*)\varphi_k(A_2 A_2^*) \ldots$$

$$\ldots \varphi_k(A_m A_m^*) \qquad (m \geqslant 1) \qquad (1)$$

$$g_k^2(A_1 \ldots A_m) \leqslant \varphi_k(A_1 A_1^*) \ldots \varphi_k(A_m A_m^*) \qquad (m \geqslant 1),$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь $A_1 \ldots A_m$ — произведение произвольных $n \times n$-матриц, $g_k(A)$ — наибольший из модулей всех $k \times k$-миноров матрицы A, $f_k(A)$ — наибольший из модулей всех главных $k \times k$-миноров матрицы A, а $\varphi_k(A) = |\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k|$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A, занумерованные так, что $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$.

Неравенства (1) содержат в себе, как частный случай, неравенства Вейля $\varphi_k^2(A) \leqslant \varphi_k(AA^*)$, Горна $\varphi_k(ABB^*A^*) \leqslant \varphi_k(AA^*)\varphi_k(BB^*)$, Цаанена $\varphi_k^2(AB) \leqslant \varphi_k(AA^*)\varphi_k(BB^*)$ и др.

Ф. Р. Гантмахер

7640. О матрицах, имеющих нулевой след. Альберт, Маккенхаупт (On matrices of trace zero. Albert A. A., Muckenhoupt Benjamin), Michigan Math. J., 1957, 4, № 1, 1—3 (англ.)

Доказано, что если след квадратной матрицы A с элементами из некоторого поля F равен нулю, то существуют такие матрицы B и C, что $A = BC - CB$.

Это утверждение было ранее доказано Сода (Shoda K., Japan. J. Math., 1936, 13 361—365) для случая, когда характеристика поля F равна нулю.

А. И. Ширшов

7641. О магических квадратах. Бут, Бут (On magic squares. Booth A. D., Booth K. N. V.), Math. Gaz., 1955, 39 № 328, 132—133 (англ.)

Доказано, что если сумма всех элементов каждой строки квадратной невырожденной матрицы A равна c, то сумма всех элементов каждой строки матрицы A^{-1} равна c^{-1}. Отсюда следует, что матрица, обратная матрице магического квадрата также является матрицей магического квадрата.

А. И. Ширшов

7642. Перестановочность матриц и их логарифмов. Керубино (Permutabilità e logaritmi delle matrici. Cherubino Salvatore), Rend. mat. e applic., 1954, 14, № 1—2, 221—238 (итал.)

Любая комплексная $n \times n$-матрица A однозначно представляется в виде $A = A_D + A_J$, где A_D и A_J — перестановочные матрицы, причем матрица A_D подобна диагональной матрице, а матрица A_J удовлетворяет соотношению $A_J^n = 0$. (Автор называет матрицу A_D главной, а матрицу A_J побочной частями матрицы A). Для построения матрицы A_D можно преобразовать матрицу A к жордановой нормальной форме, заменить нулями элементы, расположенные вне диагонали, и выполнить обратное преобразование.

Для перестановочных $n \times n$-матриц A и B матрицы A_D, A_J, B_D, B_J попарно перестановочны и $(AB)_D = A_D B_D$; $(cA)_D = cA_D$, $(A + B)_D = A_D + B_D$.

Предлагается определять главное значение логарифма невырожденной матрицы A формулой $\lg A = \lg A_D + \lg(E + A_D^{-1}A_J)$, где E — единичная матрица, $\lg A_D$ получен в результате преобразования матрицы A_D к диагональной форме, замены собственных значений α_ν главными значениями $\lg \alpha_\nu$ их логарифмов и обратного преобразования; в то же время $\lg(E + A_D^{-1}A_J)$ определен с помощью степенного ряда для $\lg(1+z)$, который в рассматриваемом случае обрывается в силу того, что $(A_D^{-1}A_J)^n = 0$. Совпадает ли это определение главного значения логарифма с обычно принятым (см., например, Richter H., Arch. Math., 1949, 2, № 50, 360—363), в работе не устанавливается. Высказанное в заключение утверждение, что для главных значений логарифмов неперестановочных матриц A и B всегда имеет место равенство $\lg AB = \lg A + \lg B$, неверно (уже для $n = 1$). H. Wielandt

Перевод из Zbl. Math., 1956, 64, 246.

7643. Протяженность матрицы. Мирский (The spread of a matrix. Mirsky L.), Mathematika, 1956, 3, № 6, 127—130 (англ.)

Протяженностью (комплексной) матрицы A автор называет число $s(A) = \max\limits_{i,k} |w_i - w_k|$, где $w_1, \ldots, w_n$ — характеристические числа матрицы A. Оказывается, что $s(A) \leqslant \left\{ 2\|A\|^2 - \frac{2}{n}|\operatorname{tr} A|^2 \right\}^{1/2}$ ($\|A\|$ — евклидова норма матрицы A), причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда A нормальна и ее характеристические числа удовлетворяют следующему условию (условие $\mathfrak{b}$): $w_1 = w_2 = \ldots = w_{n-2} = \frac{w_{n-1} + w_n}{2}$. Кроме того, если все характеристические числа матрицы A действительны, то $s(A) \leqslant \left\{ 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)(\operatorname{tr} A)^2 - 4\operatorname{tr}_2 A \right\}^{1/2}$ (где $\operatorname{tr}_2 A$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы A), причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда характеристические числа матрицы A удовлетворяют условию $\mathfrak{b}$.

Наряду с $s(A)$ автор рассматривает число

$$s_R(A) = \max_{i,k} \{ \Re w_i - \Re w_k \}$$

(где $\Re$ — операция перехода к действительной части). Оказывается, что

$$s_R(A) \leqslant \left\{ \|A\|^2 + \Re \operatorname{tr}(A^2) - \frac{2}{n}(\Re \operatorname{tr} A)^2 \right\}^{1/2},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда матрица A нормальна и действительные части ее характеристических чисел удовлетворяют условию $\mathfrak{b}$. Например, для нормальных матриц $A = (a_{ik})$ доказано, что

$$s(A) \geqslant 3^{1/2} \max_{i \neq k} |a_{ik}|, \qquad s_R(A) \geqslant \max_{i \neq k} |a_{ik} + \bar{a}_{ki}|.$$

А. Ф. Голубчиков

7644. О матричном представлении однородных алгебраических форм. Саркар Сиб Санкар (On a matrix representation of homogeneous algebraic forms. Sarkar Sib Sankar), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 4, 227—230 (англ.)

Показано, что всякая однородная алгебраическая форма степени p от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть представлена в следующем виде:

$$\underbrace{X(X\ldots(X}_{p-1}(XS)\}\ldots)X' = \underbrace{X(\ldots((SX')X')\ldots X')X'}_{p-1},$$

где $S = \|a_{i_1,i_2,\ldots,i_p}\|$ — симметрическая p-мерная матрица порядка n, а $X = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ (для производства умножения p-мерная матрица определенным образом расщепляется на квадратные подматрицы). Подробно рассмотрены лишь случаи $n = p = 3, 4$.

А. Ф. Голубчиков

7645. Бесконечные стохастические матрицы. Рэтри, Пек (Infinite stochastic matrices. Ratt ray B. A., Peck J. E. L.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, Sec. 3, 49, June, 55—57 (англ.)

Пусть x — линейное пространство всех действительных бесконечных матриц, для которых ряд, составленный из элементов любой строки или любого столбца, абсолютно сходится, и пусть $V_{N,\varepsilon}$ — подмножество пространства X, состоящее из таких матриц $x = (x_{ij})$, что $\sum_j |x_{ij}| < \varepsilon$, для любого $i \leqslant N$ и $\sum_i |x_{ij}| < \varepsilon$ для любого $j \leqslant N$. Систему $\{V_{N,\varepsilon}\}$ можно принять за фундаментальную систему окрестностей нуля некоторой топологии. Оказывается, что в этой топологии выпуклое замыкание множества всех матриц, соответствующих перестановкам осей, совпадает с множеством всех дважды стохастических матриц (ср. РЖМат, 1957, 4186). Х. Р. Сулейманова

7646 К. Матричное исчисление. Бодевиг (Matrix calculus. Bodewig E. Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1954, 334 pp.) (англ.)

Содержание: I. Матричное исчисление. II. Линейные уравнения. III. Обращение матриц. IV. Проблемы о собственных значениях.

Гл. I посвящена теоретическим основам матричного исчисления, а в остальных главах, занимающих около трех четвертей объема книги, излагаются применения матричного исчисления к численным методам алгебраического анализа. Эти приложения не являются просто иллюстрацией к теоретическому материалу, а имеют самостоятельное значение и написаны с большим знанием вычислительной техники. Различные числовые методы сопровождаются примерами вычислений, оценками ошибок и быстроты сходимости процессов и сравниваются между собой в отношении удобства их применения при вычислении на современных счетных машинах.

Основная идея, пронизывающая, главным образом, первую главу книги, состоит в том, что матричное исчисление должно оперировать не с отдельными элементами матрицы, а с ее строками и столбцами. Автор считает, что матричное исчисление, развиваясь на основе теории определителей, переняло у этой теории несвойственную ему символику. Последовательное проведение указанной основной идеи не приводит к громоздкости и позволяет при широком использовании всякого рода единичных столбцов, строк, матриц записать в компактной и прозрачной форме многие формулы матричного исчисления, записать которые в обычной символике очень трудно.

Помимо основных свойств матриц и квадратичных форм, гл. I содержит ряд вычислительных формул, а также различные оценки нормы матрицы. Хотя автор и не претендует на полное и систематическое изложение теории матриц, но тем не менее почти все теоремы строго доказаны и даже изложено приведение (с помощью вычислительных алгоритмов) к жордановой форме. Интересный материал содержит раздел, посвященный оценкам величин собственных значений

и определителей. Здесь приведена теорема Гершгорина, а также теорема Брауера, в которой круги Гершгорина заменены овалами Кассини. Для положительно определенной симметрической матрицы даны оценки Виттмейера и Вегнера, оценка детерминанта по Блоху и Пойа, теоремы Коха и Островского относительно определителей с доминирующей главной диагональю, теоремы Бендиксона, Гирша и Пика (об оценке вещественных и мнимых частей собственных значений через модули элементов эрмитовых компонент матрицы). В следующих двух главах излагаются разнообразные прямые и итерационные методы численного решения систем линейных уравнений и обращения матрицы. С помощью метода наименьших квадратов исследуются несовместные системы уравнений. Даже специалисты найдут в этих главах много интересного материала. В последней главе разбираются итерационные методы определения собственных значений и собственных векторов матрицы, а также методы Крылова и других авторов для численного вычисления коэффициентов характеристического уравнения. Ф. Р. Гантмахер

ГРУППЫ

7647. О p-группах, коммутант которых обладает двумя образующими. Блэкберн (On prime-power groups in which the derived group has two generators. Blackburn N.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 19—27 (англ.)

Доказывается, что если коммутант G' конечной p-группы G порождается двумя элементами, то третий член G_3 нижнего центрального ряда группы лежит в центре коммутанта. Кроме того, если инварианты абелевой группы G'/G'' равны m и n, где $m \leqslant n$, то G' является метациклической группой класса $\leqslant 2$, а для порядка p^k группы G'' имеет место неравенство $2k \leqslant m$. Если $k > 0$, то коммутант G' обладает образующими a, b, подчиненными определяющим соотношениям

$$ap^m = bp^{n+k} = 1,\ [a, b] = bp^n.$$

Любая группа с двумя образующими, подчиненными такого рода определяющим соотношениям, является коммутантом некоторой группы G.

Если не только коммутант, но и вся группа G порождается двумя элементами, то коммутант G' абелев. Кроме того, доказано, что: 1) коммутант 2-группы, являющейся произведением двух циклических групп, является абелевой группой с двумя образующими; 2) группа порядка 3^n метабелева, если ее класс $\leqslant n - 1$. В. К. Туркин

7648. Заметка о блоках групповых характеров. Иидзука (Note on blocks of group characters. Iizuka Kenzo), Kumamoto J. Sci., 1956, A2, № 4, 309—321 (англ.)

Даны подробные доказательства ряда теорем, для которых Брауэром был указан ранее вкратце возможный ход доказательств. Выяснена связь между значениями дефектов (для простого числа p) блоков характеров конечной группы и элементарными делителями соответствующей матрицы Картана (для того же p). Дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы неприводимые характеры, относящиеся к блокам с одинаковыми дефектами, принадлежали к одному и тому же блоку. Выведен ряд теорем относительно условий, при которых какая-либо p-подгруппа рассматриваемой группы является дефектной группой некоторого блока. Выведены формулы, дающие связь между классами сопряженных элементов данной группы $\mathfrak{G}$ и суммами, взятыми по тому или другому блоку, идемпотентов центра группового кольца над $\mathfrak{G}$ с коэффициентами из поля, порождаемого корнями g-й степени из 1 (g — порядок группы $\mathfrak{G}$). В. К. Туркин

7649. Заметка о группах Матьё. Пейдж (A note on the Mathieu groups. Paige Lowell J.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 15—18 (англ.)

С помощью известного представления группы Матьё M_{23} в виде группы коллинеаций штейнеровской системы S (4, 7, 23) (Witt E., Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1938, 12, 265—275) строится изоморфное представление группы M_{23} в группе матриц 11-го порядка. Доказательство основано на некоторых вычислениях, выполненных счетной машиной СВАК (РЖМат, 1954, 3094). Л. А. Скорняков

7650. О полуспециальных подстановках. I. Якуб (On semi-special permutations. I. Yacoub K. R.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 3, № 1, 18—35 (англ.)

Автор называет полуспециальной подстановку π совокупности символов $[n] = 1, 2, \ldots, n$, если для всякого $y \in [n]$ преобразование $\pi_y x \equiv \pi(x - y) - \pi(y) \pmod n$ также является подстановкой символов $[n]$ и притом степенью подстановки π. В случае простого n полуспециальные подстановки являются линейными, т. е. πx является линейной функцией от x (РЖМат, 1957, 2914). В случае составного n полуспециальные подстановки могут быть нелинейными. Получены необходимые и достаточные условия существования нелинейных полуспециальных подстановок, в частности доказано, что для любых чисел s, n и λ, где s делит n и λ взаимно просто с $N = n/s$, формула

$$\pi x \equiv x + \lambda s\,(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{x-1}) \pmod n,$$

где ω — нетривиальный корень сравнения $x^s \equiv 1 \pmod N$, определяет нелинейную полуспециальную подстановку. В. К. Туркин

7651. О модулярных элементах конечной группы. Цакер (Sugli elementi modulari di un gruppo finito. Zacher Giovanni), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 70—84 (итал.)

Подгруппа M (конечной) группы G называется модулярным элементом, если для любой модулярной подструктуры $\mathfrak{N}$ структуры всех подгрупп группы G структура, порождаемая M и $\mathfrak{N}$, также является модулярной подструктурой. Доказано, что если холловская (т. е. имеющая взаимно простые порядок и индекс) подгруппа M группы G является ее модулярным элементом, то либо G является прямым произведением подгруппы M и некоторой (также холловской) подгруппы H, либо выполняется следующее условие: если S — силовская подгруппа группы M и S_1 — такая силовская подгруппа группы G_1, что ее порядок взаимно прост с порядком группы M и ее централизатор не содержится в централизаторе подгруппы S_1, то подгруппа, порожденная подгруппами S и S_1, является прямым множителем группы G и структура ее подгрупп модулярна. Доказана также обратная теорема. Кроме того, определены все модулярные элементы конечной группы, имеющей циклические силовские подгруппы. В. К. Туркин

7652. О группах, все нетривиальные степени которых являются циклическими подгруппами. Сас (Csoportokról, amelyeknek összes nem-triviális hatványai ciklikus alcsoportok. Szász Ferenc), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 4, 491—492 (венг.)

Доказана следующая теорема: Группа G тогда и только тогда является циклической, когда все ее степени G^k ($k \neq 0, 1, -1$) цикличны. Здесь G^k — под-

группа, порожденная k-ми степенями всех элементов группы G. L. Fuchs

7653. О характеристике циклических групп. Пик (Despre caracterizarea grupurilor ciclice. Pic Gh.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 2, 235—238 (рум.; рез. русск., франц.)

Группа G называется группой со свойством Q, если для каждой ее циклической подгруппы H существует такое число k, что H порождается всеми элементами группы G, порядки которых делят k. Доказывается, что группа тогда и только тогда обладает свойством Q, когда она изоморфна подгруппе аддитивной группы рациональных чисел, приведенных по модулю 1. Отсюда вытекает, что конечная группа тогда и только тогда обладает свойством Q, когда она является циклической группой. А. П. Мишина

7654. Абелевы группы с единственной максимальной подгруппой. Фукс, Селе (Abel-csoportok egyetlen maximális alcsoporttal. Fuchs László, Szele Tibor), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 4, 387—389 (венг.)

Доказано, что абелева группа тогда и только тогда обладает единственной максимальной подгруппой, когда она является прямой суммой полной группы и либо примарной циклической группы, либо некоторой сервантной подгруппы аддитивной группы целых p-адических чисел. A. Kertész

7655. О линейных формах, инвариантных относительно абелевой группы линейных преобразований. Неф (Über lineare Formen, die gegenüber einer abelschen Gruppe linearer Transformationen invariant sind. Nef Walter), Arch. Math., 1956, 7, № 4, 250—258 (нем.)

Пусть Γ — абелева группа линейных преобразований векторного пространства $\mathfrak{M}$ над полем вещественных чисел. Частичным упорядочением пространства $\mathfrak{M}$ называется такое рефлексивное и транзитивное отношение $x \geqslant y$, определенное для некоторых пар элементов из $\mathfrak{M}$, что: 1) если $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, то $x = y$; 2) если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ для любого $z \in \mathfrak{M}$; 3) если $x \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 0$, то $\alpha x \geqslant 0$; 4) если $x \geqslant y$, то $x^\sigma \geqslant y^\sigma$ для произвольного преобразования $\sigma \in \Gamma$. Линейная вещественная форма f, определенная на частично упорядоченном векторном пространстве $\mathfrak{M}$, называется монотонной, если из $x \geqslant 0$ следует, что $f(x) \geqslant 0$. Линейная форма f, определенная на $\mathfrak{M}$, называется Γ-ограниченной, если для каждого вектора $x \in \mathfrak{M}$ функция $f(x^\sigma)$ ($\sigma \in \Gamma$) ограничена (на Γ).

Основные результаты. На пространстве $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда существует ненулевая инвариантная относительно Γ линейная форма, когда существует такая Γ-ограниченная линейная форма f и такой элемент $x_0 \in \mathfrak{M}$, что $f(x_0^\sigma) \geqslant 1$ для любого $\sigma \in \Gamma$. На пространстве $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда существует ненулевая монотонная инвариантная относительно Γ линейная форма F, для которой $F(x_0) = 1$, где x_0 — произвольный фиксированный вектор, когда существует такая монотонная Γ-ограниченная линейная форма f, что $f(x_0^\sigma) \geqslant 1$ для любого $\sigma \in \Gamma$. Инвариантную (монотонную) форму, заданную на некотором инвариантном относительно группы Γ подпространстве пространства $\mathfrak{M}$, тогда и только тогда можно продолжить до инвариантной (монотонной) линейной формы, определенной на всем пространстве $\mathfrak{M}$, когда эту форму можно продолжить до Γ-ограниченной монотонной линейной формы.

А. А. Виноградов

7656. Замечание о теореме Хана об упорядоченных абелевых группах. Клиффорд (Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups. Clifford A. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 860—863 (англ.)

Показано, что при некоторых изменениях метод, примененный в работе Хаусснера и Уэндела (Hausner M., Wendel J. G., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 977—982), дает доказательство теоремы Хана о вложимости упорядоченной группы в лексикографическое упорядоченное пространство действительных функций, а также доказательство необходимого и достаточного условия полноты упорядоченной группы. Более общая теорема доказана Конрадом (РЖМат, 1954, 604). Е. П. Шимбирева

7657. Центральные Г-подрасширения полного произведения абелевых групп. Калужнин Л. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 413—422

Г-расширение $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \psi_i)$ (РЖМат, 1957, 5359) называется центральным (соответственно, главным), если нормальный ряд

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \ldots \mathfrak{G}_{s-1} \supset 1$$

является центральным (соответственно, инвариантным) рядом группы $\mathfrak{G}$. Доказано, что подрасширение $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \psi_i)$ полного Г-расширения (U, U_i, ψ_i) тогда и только тогда является главным расширением, когда для любого $i = 1, \ldots, s$ все элементы группы $\mathfrak{G}_i$ оставляют на месте первые i координат каждого элемента группы Г. Доказано также, что подрасширение $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \psi_i)$ полного Г-расширения (U, U_i, ψ_i) тогда и только тогда является центральным расширением, когда централизатор $\mathfrak{G}' = \mathfrak{Z}(U; \mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$ в группе U транзитивен. В этом случае $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}_i', \psi_i)$, где $\mathfrak{G}_i' = \mathfrak{G}' \cap U_i$ также является центральным подрасширением и $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(U, \mathfrak{G}')$, причем существует такой естественный антиизоморфизм $\nu_{\mathfrak{G}}$ группы $\mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{G}'$, являющийся Г-антиизоморфизмом подрасширения $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_i, \psi_i)$ на подрасширение $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}_i', \psi_i)$ (в том смысле, что для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\psi_i(X) = \psi_i(\nu_{\mathfrak{G}} X)$ для всех $X \in \mathfrak{G}_{i-1}$), что ядром гомоморфизма $\sigma_{\mathfrak{G}}$: $\mathfrak{G} \to U_s$, определенного формулой $\sigma_{\mathfrak{G}}(X) = X\,(\nu_{\mathfrak{G}}(X))^{-1}$, является центр группы $\mathfrak{G}$.

В заключение приводятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы центральный ряд центрального расширения был его верхним или нижним центральным рядом. Б. И. Плоткин

7658. Группы с конечными и ограниченными в совокупности порядками классов сопряженных элементов. Уиголд (Groups with boundedly finite classes of conjugate elements. Wiegold J.), Proc. Roy. Soc., 1957, A238, № 1214, 389—401 (англ.)

Доказано, что порядок коммутанта G' группы G, в которой нет элементов, имеющих более чем n сопряженных, и имеется хотя бы один элемент имеющий точно n сопряженных (РЖМат, 1956, 5116), не превосходит числа n^N, где

$$N = \frac{1}{2} n (n-1) \log_2 n \{n (n-1) (\log_2 n)^2 + 1\}.$$

Если n — простое число, то G' — циклическая группа порядка n. Кроме того (без полного доказательства), утверждается, что если $n = 4$, то G' является либо группой четвертого порядка, либо элементарной абелевой группой восьмого порядка. Н. Ф. Сесекин

7659. Гомоморфные отображения групповых расширений. Лонстра (Homomorphe Abbildungen von Gruppenerweiterungen. Loonstra F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1957, A60, № 1, 44—54; Indagationes math., 1957, 19, № 1, 44—54 (нем.)

Пусть G и G' — расширения групп A и A' с помощью групп B и B' соответственно. Рассматривается задача о построении гомоморфизма $G \to G'$, индуцирующего данные гомоморфизмы $A \to A'$ и $B \to B'$. Эта задача решается для случая, когда группы A и A' абелевы. Рассматриваются и другие смежные вопросы.
В. К. Туркин

7660. Возрастающие ряды коммутантов. **Нёйман** (Ascending derived series. Neumann B. H.), Compositio math., 1956, 13, № 1, 47—64 (англ.)

Возрастающий ряд несовпадающих групп $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ называется возрастающим рядом коммутантов, если $G_i = G'_{i+1}$ для любого $i \geqslant 0$. С помощью сплетенного произведения групп в работе строятся различные примеры бесконечных возрастающих рядов коммутантов. Оказывается, что для любого такого ряда все факторы вида G_{i+2}/G_i обязательно имеют бесконечное число образующих (однако факторы вида G_{i+1}/G_i могут быть даже конечными). Доказывается ряд частных результатов, из которых приведем следующий: Любая неабелева метабелева группа с конечным числом образующих обладает конечным неабелевым (и метабелевым) гомоморфным образом.
Б. И. Плоткин

7661. Теорема расщепления и теорема о главном идеале для некоторых групп с бесконечным числом образующих. **Шенкман** (A splitting theorem and the principal ideal theorem for some infinitely generated groups. Schenkman Eugene), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 870—873 (англ.)

Доказано, что если G — такая периодическая группа, что пересечение G^* всех членов ее убывающего центрального ряда является абелевой группой и факторгруппа G/G^* конечна и в силовских подгруппах группы G^* соответствующих простым делителям порядка группы G/G^* нет элементов бесконечной высоты, то группа G содержит такую конечную нильпотентную подгруппу H, что $H \cap G^* = E$ и $\{H, G^*\} = G$. Доказано также, что если для некоторой группы G с абелевым коммутантом G' фактор-группа G/G' конечна и в силовских подгруппах коммутанта соответствующих простым делителям порядка группы G/G' нет элементов бесконечной высоты, то сдвиг G в G' равен E.

Предположение об отсутствии элементов бесконечной высоты существенно в обеих теоремах.
Б. И. Плоткин

7662. Силовские базы топологических групп. **Гольберг П. А.**, Уч. Зап. Коломенск. пед. ин-т, 1956, 1, 5—9

Дается определение силовской базы топологической группы и доказывается, что если T-периодическая топологическая группа содержит силовскую базу, обладающую конечным числом сопряженных, то все силовские базы этой группы сопряжены между собой.
Г. Я. Мордкович

7663. Теорема коммутации. **Такахаси** (Un théorème de commutation. Takahashi Reiji), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 9, 1103—1106 (франц.)

Пусть G — локально компактная унимодулярная группа, $K_1 \subset K_2$ — ее компактные подгруппы, α — одномерное унитарное представление подгруппы K_2, $\mathscr{H}^\alpha$ — пространство таких функций $f \in L^2(G)$, что $f(k_1 g k_2) = \alpha(k_1)\,\alpha(k_2)\,f(g)$ для любых элементов $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$, и A_i^α — алгебра в $L^1(G)$, состоящая из таких функций $\varphi \in L^1(G)$, что $\varphi(k_i g k'_i) = \alpha(k_i)\,\alpha(k'_i)\,\varphi(g)$ для любых элементов k_i, $k'_i \in K_i$ $(i = 1, 2)$. Если $\varphi \in A_1^\alpha$, $\psi \in A_2^\alpha$, $f \in \mathscr{H}^\alpha$, то $\varphi * f \in \mathscr{H}^\alpha$, $\varphi * \psi \in \mathscr{H}^\alpha$; следовательно, формулы $U_\varphi^\alpha f = \varphi * f$ и $V_\psi^\alpha f = f * \psi$ определяют некоторые операторы U_φ^α и V_ψ^α в пространстве $\mathscr{H}^\alpha$. Утверждается, что операторные кольца L^α, R^α, порожденные соответственно операторами U_φ^α, $\varphi \in A_1^\alpha$ и операторами V_ψ^α, $\psi \in A_2^\alpha$, являются взаимными коммутаторами: $(L^\alpha)' = R^\alpha$ и $(R^\alpha)' = L^\alpha$.
М. И. Граев

7664. Разрезы в связных топологических группах. **Меленцов А. А.**, Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 289—298

Подгруппа H связной и локально связной топологической группы G называется ее разрезом, если множество $G \setminus H$ несвязно и плотно в G. Пусть N — связная компонента единицы разреза H. Если множество $G \setminus H + N$ связно, а фактор-группа H/N дискретна, то разрез H называется простым. Оказывается, что 1) любое собственное подмножество простого разреза H обладает связным дополнением (в группе G); 2) в разложении $G \setminus H = P_1 + P_2$, $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 (G \setminus H) = \emptyset$ множества P_1 и P_2 являются областями, причем если P_1 и P_2 непусты, то разложение единственно и $P_2 = P_1^{-1}$; 3) множество P_1 инвариантно тогда и только тогда, когда инвариантна подгруппа H; 4) $P_1 = hP_1h_1$, где h, h_1 — произвольные элементы разреза H. Кроме того, доказано, что если связная топологическая группа G обладает связным разрезом H, то все элементы конечного порядка группы G содержатся в H, причем если H — нормальный делитель, то операция извлечения корня в G в тех случаях, когда она возможна, определена с точностью до множителя из H.
М. И. Граев

7665. Алгебра, связанная с компактной группой. **Джерисон** (An algebra associated with a compact group. Jerison Meyer), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 933—939 (англ.)

Доказано, что две компактные топологические группы тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны банаховы алгебры (относительно свертки) непрерывных комплексных функций, определенных на этих группах. Для абелевых групп аналогичная теорема доказана для алгебр функций, принимающих значения в коммутативных банаховых алгебрах без идемпотентных (отличных от единицы) элементов.
М. И. Граев

7666. Соотношения между некоторыми тензорами, присоединенными к группе G_r. **Добреску** (Relații intre tensorii asociați unui grup G_r. Dobrescu Andrei), Rev. Univ. «C. I. Parhon» și Politehn. București. Ser. științ. natur., 1953, № 3, 39—42 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть c_{kl}^h — структурные константы некоторой r-мерной группы Ли G и пусть $c_h = c_{\alpha h}^\alpha$, $c_{hk} = c_{h\beta}^\alpha c_{k\alpha}^\beta$. Оказывается, что $c_\alpha c_{hk}^\alpha = 0$, $c_{h_2} c_{kl}^\alpha = c_{hkl} - c_{hlk}$ и $c_{h_2} c_{kl}^h + c_{k\alpha} c_{hl}^\alpha = 0$. Группа тогда и только тогда разрешима, когда $c_{h\alpha} c_{kl}^\alpha = 0$. Если $c_h \neq 0$ хотя бы для одного h, то размерность первой производной группы не превосходит $r - 1$. Если ранг p-матрицы (c_{hk}) не больше единицы, то группа разрешима. Если группа разрешима, то $p \leqslant r - 2$ и размерность первой производной группы не превосходит $r - p$. Для вещественной группы G_r квадратичная форма $\varphi = c_{hk} x^h x^k$ не положительно определена.
Р. А. Минлос

7667. Классические группы. **Лесьёр** (Groupes classiques. Lesieur L.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 36, № 180, 89—100 (франц.)

Излагаются некоторые известные свойства классических групп линейных преобразований n-мерного пространства над произвольным полем.
А. Л. Онищик

7668. Одна задача о множествах, связанная с теорией роста. Жаффар (Un problème sur les ensembles lié à la théorie de la croissance. Jaffard Paul), Bull. sci. math., 1956, 80, juilletaoût, 100—108 (франц.)

Фильтром на множестве E называется такое семейство F подмножеств этого множества, не содержащее пустого множества, что если $X \subset Y$ и $X \in F$, то $Y \in F$, а если $X, Y \in F$, то $X \cap Y \in F$. Фильтр называется ультрафильтром, если вместе с суммой конечного числа множеств в него входит, по крайней мере, одно из слагаемых. Говорят, что ультрафильтр U имеет свойство D, если существует счетное семейство множеств, не входящих в U, сумма которых входит в U. Примером ультрафильтра, не обладающего свойством D, является главный ультрафильтр, который состоит из всех подмножеств множества E, содержащих фиксированную точку x. Доказывается, что если мощность E не превосходит c, то всякий неглавный ультрафильтр имеет свойство D. Вещественные функции f и g, предельные на множестве E, называются сравнимыми по фильтру U, если U содержит множество, на котором $f = g$. Оказывается, что если U — ультрафильтр, то множество классов сравнимых по U функций естественным образом определяется как вполне упорядоченная группа. Эта группа неархимедова тогда и только тогда, когда ультрафильтр U не обладает свойством D.

А. Л. Онищик

7669. Инвариантность областей в полугруппах. Уоллес (The gebietstreue in semigroups. Wallace A. D.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1956, A59, № 3, 271—274; Indagationes math., 1956, 18, № 3, 271—274 (англ.)

Для любого элемента t моба S через $\Gamma(t)$ обозначается замыкание порожденной им циклической подполугруппы. Если полугруппа $\Gamma(t)$ компактна, то она содержит минимальный идеал $K(t)$. Единица этого идеала обозначается через $\eta(t)$. Далее для любого подмножества $A \subset S$ через $P(A)$ обозначается множество всех элементов $t \in S$, для которых $tA = A$. Подмножество $A \subset S$ называется (n, G)-краем моба S, где G — некоторая абелева группа, если для любого содержащего A замкнутого собственного подмножества $B \subset S$ отображение вложения групп когомологий $H^n(S, G) \to H^n(B, G)$ не является эпиморфизмом.

Оказывается, что если A — замкнутый (n, G)-край компактного моба S, то $P(A) \subset P(S)$; в частности, для любого элемента $t \in P(A)$ элемент $\eta(t)$ является левой единицей моба S. Если, кроме того, моб S связен и отличен от своего минимального идеала K, а множество $P(A)$ не пусто, то $AS = S = K \cup SA$; при этом если $P(S) = P(A)$, то $P(S) \subset A$. В частности, если для границы A компактного связного моба $S \neq K$, содержащегося в n-мерном евклидовом пространстве ($n \geqslant 2$), множество $P(A)$ не пусто, то $P(A) = P(S) \subset A$. (ср. РЖМат, 1956, 1203).

Получены и некоторые другие результаты об (n, G)-краях.

Л. М. Глускин

7670. О структурно-упорядоченных полугруппах, удовлетворяющих условию обрыва цепей. Лесьёр (Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne. Lesieur L.), Bull. Soc. math. France, 1955, 83, № 2, 161—193 (франц.)

Говорят, что структурно-упорядоченная полугруппа T с единицей e удовлетворяет условию (H), если T имеет наибольший элемент u, является квазицелой ($ab \leqslant b$, $ab \leqslant a$ для любых $a, b \in T$) структурой с делением и удовлетворяет либо условию максимальности (условие N_1), либо следующему ослабленному условию минимальности (условие N_2): любая ограниченная снизу убывающая цепочка конечна. Структуры идеалов колец или полугрупп, удовлетворяющих условию N_1 или N_2, удовлетворяют условию (H).

Элемент p называется простым элементом, если из $bc \leqslant p$ следует, что либо $b \leqslant p$, либо $c \leqslant p$. Если выполнено условие (H), то для каждого элемента $a \in T$ существует конечное число минимальных простых элементов $p \geqslant a$. Радикалом элемента a называется наибольший элемент $x \in T$, для которого существует такое натуральное число $m > 0$, что $x^m \leqslant a$. В полугруппах, удовлетворяющих условию (H), для любого элемента существует радикал. Радикал элемента a является пересечением всех минимальных простых элементов $p_i \geqslant a$. В работе доказываются некоторые общие теоремы, содержащие целый ряд результатов об идеалах полугрупп с нулем, полученных различными авторами.

Элемент $a \in T$ называется примальным справа, если из $a :: n_1 > a$, $a :: n_2 > a$ следует, что $(a :: n_1) \cap (a :: n_2) > a$. Аналогично определяются примальные слева и просто примальные элементы (для идеалов коммутативных колец понятие примальности введено Фуксом (Fuchs L., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 1—6)).

Доказано, что каждый не примальный справа элемент $a \in T$ является пересечением конечного числа примальных справа элементов, делящих справа элемент a. Разложение $a = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_m$ $(a_i \neq a)$ называется редуцированным справа, если из $a_i :: n > a_i$ следует, что $a :: n > a$. Доказана теорема о существовании однозначно определенного редуцированного справа разложения любого элемента a в пересечение примальных справа элементов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Структура T называется слабо $\cap$-связанной, если для элементов любой ограниченной снизу цепочки $\{y_\alpha\}$ имеет место равенство $x \cap U_{y_\alpha} = \cup (x \cap y_\alpha)$ (этим свойством обладает, например, любая полугруппа, удовлетворяющая условию N_1). Доказано, что в удовлетворяющей условию N_2 слабо $\cap$-связанной структуре с наибольшим элементом любой элемент является произведением конечного числа $\cap$-несократимых элементов.

Элемент $q \in T$ называется примарным справа, если из соотношений $xy \leqslant q$, $y \nleqslant q$ следует существование такого натурального $k > 0$, что $x^k \leqslant q$. Элемент примарный справа и слева называется примарным. Автор доказывает две теоремы о разложении элементов $a \in T$ в произведение примарных элементов, дополняющие результаты работы Уорда и Дилуэрта (Ward M., Dilworth R. P., Trans. Amer. Math. Soc., 1939, 45, 334—354).

Говорят, что T удовлетворяет условию (I), если для каждой пары элементов $a, d \in T$ существуют такие натуральные числа $s > 0$ и $k > 0$, что $a^s \cap d^k \leqslant ad$, $a \cap d^k \leqslant ad$.

Доказывается, что если полудедекиндова слабо $\cap$-связная структура T удовлетворяет условиям (H) и (I), то любой элемент $a \in T$ является произведением конечного числа примарных элементов. Элемент a структурно-упорядоченной полугруппы T называется справа главным элементом, если для каждого элемента $b \in T$ из соотношения $x' \leqslant ab$ следует существование такого элемента $x \leqslant b$, что $x' = ax$.

Справа и слева главный элемент называется главным элементом. Говорят, что T удовлетворяет условию (II), если каждый элемент $a \in T$ является объединением главных элементов. Доказывается, что в слабо $\cap$-связанной полудедекиндовой полугруппе T, удовлетворяющей условиям (H) и (II), любой элемент $a \in T$ является произведением конечного числа примарных элементов. (Условие полудедекиндовости необходимо). Из этой теоремы, например, следует, что

если идеалы коммутативной полугруппы удовлетворяют условию N_2, то каждый идеал является произведением конечного числа примарных идеалов. Доказывается также еще одна теорема о разложении элемента $a \in T$ в произведение конечного ряда примарных элементов. Кроме того, доказываются теоремы, аналогичные известным теоремам об однозначности разложения идеалов в произведение примарных.
S. Schwarz

1671. О несократимых идеалах в полугруппах. Лесьёр (Sur les idéaux irreductibles d'un demi-groupe. Lesieur L.), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova. Parte I, 1955, 24, 29—36 (франц.)

Идеал q коммутативной полугруппы с единицей, идеалы которой удовлетворяют либо условию N_1, либо условию N_2 (реф. 7670), называется $\cap$-сократимым, если $q = q_1 \cap q_2$, где $q_1 > q$.

Основной результат работы: Идеал q тогда и только тогда $\cap$-несократим, когда он примарен и когда между идеалами q и $q : p$, где p — радикал идеала q, не содержится ни одного примарного идеала. Это утверждение уточняет одну из теорем в цитированной выше работе автора. Для идеалов нетеровского кольца эта теорема была доказана Грёбнером (Gröbner W., Math. Ann., 1934, 110, 197—222; Monatsch. Math. Österreich, 1951, 55, 138—145). Аналогичную теорему можно доказать и для некоторых упорядоченных полугрупп.
S. Schwarz

7672. Одномерные однородные, связные компактные полугруппы с единицей суть группы. Уоллес (One-dimensional homogeneous clans are groups. Wallace A. D.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 5, 578—580; Indagationes math., 1955, 17, № 5, 578—580 (англ.)

Доказывается теорема, сформулированная в заголовке. (Пространство S называется однородным, если для любых точек $a \in S$ и $b \in S$ существует такой гомеоморфизм: $f : S \to S$, что $f(a) = b$). С. С. Рышков

7673. Отображения с делением. Круазо (Applications résiduées. Croisot R.), Ann. scient. École norm. supér., 1956, 73, № 4, 453—474 (франц.)

В полугруппе K всех изотопных отображений ξ частично упорядоченного множества E в себя естественным образом вводится регулярное отношение частичной упорядоченности: считается, что $\xi \leqslant \eta$, если $x\xi \leqslant x\eta$ при любом $x \in E$. Отображение $\alpha \in K$ называется отображением с делением, если для каждого $x \in E$ множество элементов $z \in E$, удовлетворяющих соотношению $z\alpha \leqslant x$, не пусто и содержит наибольший элемент, который обозначается через $x\bar{\alpha}$. Отображение $\alpha : x \to x\bar{\alpha}$ также содержится в K, причем $\bar{\alpha}\alpha \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha\bar{\alpha}$, где ε — единица полугруппы K. Отсюда следует, что $\alpha\bar{\alpha}\alpha = \alpha$, $\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$. Кроме того, $\bar{\alpha}\beta = \beta\bar{\alpha}$.

В работе подробно изучается подполугруппа K_α полугруппы K, порожденная произвольным элементом α с делением и соответствующим ему элементом $\bar{\alpha}$. В частности доказано, что если $\varepsilon \in K_\alpha$, то либо $\varepsilon \in \{\alpha\}$, либо $\varepsilon = \bar{\alpha}\alpha$, либо $\varepsilon = \alpha\bar{\alpha}$. Отдельно исследованы случаи, когда $\alpha^2 \leqslant \alpha$, в частности, когда $\alpha \leqslant \varepsilon$.

В качестве приложений рассмотрены случаи, когда α является упорядоченной группой или множеством правых идеалов некоторой полугруппы D.
Л. М. Глускин

7674. Неразложимые вполне простые полугруппы, не являющиеся группами. Тамура (Indecomposable completely simple semigroups except groups. Tamura Takayuki), Osaka Math. J., 1956, 8, № 1, 35—42 (англ.)

Найдено условие, достаточное для того, чтобы вполне простая в смысле Риса полугруппа (Rees D., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1940, 36, 387—400) не имела иных гомоморфизмов, кроме изоморфизмов и гомоморфизма на единичную группу. Автор не упоминает вышедшую ранее работу Л. Глускина (РЖМат, 1956, 3693), в которой получено то же условие. Выясняется вопрос об изоморфизме и антиизоморфизме указанных полугрупп и для некоторых низших порядков вычисляется количество неизоморфных между собою полугрупп такого типа.
Е. С. Ляпин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

7675. О тождественности двух алгебраических полей n-го порядка. Биллевич К. К., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 4, 571—574

Указывается алгорифм для решения задачи о совпадении двух числовых полей одной и той же степени, основывающийся на том, что для совпадающих полей построенные на их решетках последовательности $\{1\}^{(k)}$ (РЖМат, 1957, 6873) должны при всех k состоять из одних и тех же точек.
Б. М. Уразбаев

7676. Решение проблемы Эрдёша—Гилмана—Хенриксена. Робинсон (Solution of a problem by Erdös-Gillman-Henriksen. Robinson Abraham), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, №5, 908—909 (англ.)

Построены алгебраически изоморфные и имеющие один и тот же порядковый тип, несчетные вещественно замкнутые неархимедовы поля, не изоморфные, как упорядоченные поля. Тем самым решена одна из проблем, поставленных Эрдёшем, Гилманом и Хенриксеном (РЖМат, 1956, 6442).
А. А. Виноградов

7677. Частично упорядоченные поля. Дюбойс (On partly ordered fields. Dubois D. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 918—930 (англ.)

Частично упорядоченным полем F называется поле, в котором выделено непустое подмножество P, замкнутое относительно сложения и деления (положительный конус). Если для каждого отличного от нуля элемента $x \in F$ либо $x \in P$, либо $-x \in P$, то поле F называется (просто) упорядоченным.

В основном автор изучает частично упорядоченные поля, обладающие следующим свойством: (свойство AC) если $x + \frac{1}{n} \in P$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $x \neq 0$, то $x \in P$.

В этом случае конус P является пересечением положительных конусов некоторой системы простых упорядочений. Элемент $x \in F$ называется ограниченным, если существует такое n (натуральное, кратное единице), что $n - x \in P$ и $n + x \in P$. Все ограниченные элементы образуют некоторое подкольцо B поля F. Оказывается, что конус P тогда и только тогда не содержится ни в каком собственном подполе поля F (поля, удовлетворяющие этому условию, называются примитивными), когда F является полем частных кольца B.

В этом случае кольцо B допускает представление в виде кольца непрерывных вещественных функций, определенных на некотором компактном Хаусдорфовом пространстве; точками этого пространства являются классы простых упорядочений поля F, положительные конусы которых содержат конус P.

В заключение работы автор изучает вопрос о возможности расширения данного частичного упорядочения поля F на его простое (алгебраическое или трансцендентное) расширение F'.
А. А. Виноградов

7678. Об L-рядах алгебраического многообразия. Лан (Sur les séries L d'une variété algébrique. Lang Serge), Bull. Soc. math. France, 1956, 84, № 4 385—407 (франц.)

Пусть V — абстрактное нормальное многообразие над конечным полем K, состоящим из q элементов, K — поле функций на многообразии V и E — нормальное расширение степени n поля K с группой Галуа G. Тогда нормальный образ U многообразия V в поле E является абстрактным многообразием, для которого существует такое всюду определенное рациональное отображение $f: u \to v$, что прообраз любой точки многообразия V состоит не более, чем из n точек многообразия U.

Известное построение Фробениуса позволяет каждой точке $Q \in V$ отнести некоторый (определенный с точностью до сопряженности) элемент $T_Q \in G$; при этом точкам Q, принадлежащим некоторому дивизору Z, содержащему все особые точки и точки разветвления многообразия, соответствует единица группы G. Оказывается, что существует такое положительное число A, зависящее только от f, u, v и z, что для любого характера λ группы G:

$$\left|\sum \lambda(T_Q) - \varepsilon q^r\right| \leqslant A q^{r-1/2},$$

где $\varepsilon = 0$, если $\lambda \neq \lambda_1$, и $\varepsilon = 1$, если $\lambda = \lambda_1$ (суммирование распространяется на все рациональные точки $Q \in V$).

Получено много следствий этого результата, в том числе весьма далеко идущее обобщение теоремы Дирихле о простых числах в прогрессиях на случай произвольного абелева многообразия.

7679. **Арифметическое задание топологии в телах. Ковальский, Дюрбаум** (Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien. Kowalsky H.-J., Dürbaum H.), J. reine und angew. Math., 1953, 191, 135—152 (нем.)

Доказано, что топологическое тело тогда и только тогда обладает оценкой в упорядоченной абелевой группе, когда оно имеет тип V в смысле Капланского (Duke Math. J., 1947, 14, 527—541) и ограниченный коммутант мультипликативной группы. Этот результат был анонсирован Флейшером (РЖМат, 1953, 608). Получены также другие результаты того же рода, как, например, следующий: топологическое тело типа V без нильпотентных (в топологическом смысле) элементов тогда и только тогда обладает оценкой (вообще говоря, в неабелевой упорядоченной группе), когда оно содержит инвариантную ограниченную окрестность нуля.

7680. **Теория Галуа в кольцах непрерывных преобразований. Розенберг, Зелинский** (Galois theory of continuous transformation rings. Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 2, 429—452 (англ.)

Пусть M и N — двойственные друг другу векторные пространства над телом D. Рассматривается кольцо $A = L(M, N)$ непрерывных (в слабой топологии, определяющейся пространством N) линейных преобразований пространства M. Пусть Γ — произвольная группа автоморфизмов кольца A, G_Γ — ее подгруппа, состоящая из внутренних автоморфизмов, и T_Γ — минимальное подкольцо кольца A, содержащее все элементы, порождающие автоморфизмы из G_Γ. Группа Γ называется регулярной (полурегулярной), если: 1) внутренний автоморфизм, порожденный любым обратимым элементом кольца T_Γ, принадлежит группе Γ; 2) индекс подгруппы G_Γ в группе Γ и размерность кольца T_Γ над центром кольца A конечны; 3) кольцо T_Γ является простым (полупростым) кольцом. Кольцо A называется кольцом Галуа над подкольцом C_0, если кольцо C_0 состоит из всех элементов, остающихся на месте при автоморфизмах из некоторой регулярной группы Γ_0. Оказывается, что в этом случае регулярные подгруппы группы Γ_0 находятся во взаимно однозначном соответствии Галуа с подкольцами $C \supset C_0$ кольца A, имеющими простой централизатор (в A). Любой автоморфизм σ подкольца $C \supset C_0$ над кольцом C_0 можно продолжить до некоторого автоморфизма кольца A, если только централизаторы колец C и C_σ являются простыми кольцами. Наконец, наименьшая подгруппа группы Γ_0, содержащая подгруппу Λ всех автоморфизмов из Γ_0, оставляющих некоторое подкольцо $C \supset C_0$ на месте, и все внутренние автоморфизмы, порожденные обратимыми элементами из T_Λ, тогда и только тогда совпадает с Γ_0, когда централизатор кольца C_0 в кольце C полупрост и существует такая группа автоморфизмов кольца C, что любой элемент кольца C, остающийся на месте при всех автоморфизмах из этой группы, принадлежит C_0. Эта группа полурегулярна и совпадает с группой всех автоморфизмов из Λ, рассматриваемых как автоморфизм кольца C.

М. И. Граев

7681. **Аннуляторы в кольцах множеств. Мак-Кой** (Annihilators in polynomial rings. Mc Coy Neal H.), Amer Math. Monthly, 1957, 64, № 1, 28—29 (англ.)

Пусть A — правый идеал кольца многочленов $R(x_1, \ldots, x_k)$ над кольцом R и A^r — множество таких элементов $h \in R(x_1, \ldots, x_k)$, что $Ah = 0$. Доказывается, что если $A^r \neq 0$, то $A^r \cap R \neq 0$. Отсюда следует, что если кольцо R коммутативно, то для любого делителя нуля f в кольце $R(x_1, \ldots, x_k)$ найдется такой ненулевой элемент $C \in R$, что $Cf = 0$. Для случая многочленов от одного неизвестного последнее предложение было ранее доказано автором (Amer. Math. Monthly, 1942, 49, 286—295) и другими. И. З. Розенкноп

7682. **Об одном множестве колец, содержащихся в поле рациональных функций. Терпстра** (On a set of rings contained in a field of rational functions. Terpstra Fedde J.), Math. Ann., 1957, 133, № 1, 41—51 (англ.)

Пусть K — поле рациональных функций от двух переменных над алгебраически замкнутым полем k. Для любых элементов $u, v \in K$ обозначим через $\{u, v\}$ подкольцо поля K, состоящее из всех функций вида $\frac{A(u, v)}{B(u, v)}$, где $A(u, v)$, $B(u, v)$ — многочлены от u, v с коэффициентами из поля k, причем $B(0, 0) \neq 0$. Подкольца $\{u, v\}$ автор называет точками и изучает множество всех точек по отношению к имеющейся в нем естественной частичной упорядоченности (по теоретико-множественному включению). Например, доказано, что для любой точки $\{x, y\}$ точка $\left\{rx + sy, \frac{px + qy}{rx + sy}\right\}$, где p, q, r, s — такие элементы поля k, что $ps - qr \neq 0$ является точкой, непосредственно следующей за точкой $\{x, y\}$. Доказано также, что для любых двух точек, одна из которых следует за другой, существует только конечное число «промежуточных» точек и т. д.

Б. М. Уразбаев

7683. **О понятии прямого произведения. Коимбра-ди-Матуш** (Sur la notion de produit direct. Coimbra de Matos A.), Rev. Fac. ciênc. Univ Lisboa, 1955—1956, A5, № 1, 63—74 (франц.)

Пусть M — правый, а N' — левый модули над произвольным кольцом Ω. Следуя известным идеям Джекобсона, Бурбаки (Jacobson N., Lectures in Abstract Algebra, New York, 1953, vol. II; Bourbaki N., Les structures fondamentales de l'analyse, Algèbre multilinéaire, Paris, 1948), автор в наиболее общем виде определяет прямое произведение $M \otimes_\Omega N'$ модулей M

и N'. Называя целочисленную функцию, определенную на множестве всех пар (x, y'), $x \in M$, $y' \in N'$ и принимающую для почти всех пар (x, y') нулевое значение конечной матрицы над кольцом I целых чисел, автор определяет прямое произведение как фактор-модуль $I_{MXN'}|_m$, где $I_{MXN'}$ — модуль всех конечных матриц над I, а m — его подмодуль, порожденный всеми матрицами вида $[x, y_1' + y_2'] - [x, y_1'] - [x, y_2']$, $[x_1 + x_2, y'] - [x_1, y'] - [x_2, y']$, $[x\alpha, y'] - [x, \alpha y']$, где $\alpha \in \Omega$ (Здесь $[x, y']$ — матрица, принимающая значение 1 для пары (x_1, y') и равная нулю для всех остальных пар). Прямое произведение рассматривается также при некоторых специальных примечаниях на M, N' и Ω. L. Fuchs

7684. **О неприводимых идеалах коммутативного кольца или коммутативной полугруппы. Лесьёр** (Sur les idéaux irréductibles d'un anneau ou d'un demi-groupe commutatif. Lesieur L.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 8, № 11, 1—8 (франц.)

Пусть A — коммутативное кольцо с условием обрыва возрастающих цепей идеалов или с ослабленным условием обрыва убывающих цепей идеалов (т. е. с условием обрыва цепей для фактор-колец); D — коммутативная полугруппа с аналогичным условием. Структура T идеалов кольца A или полугруппы D является дедекиндовой целой Cl-полугруппой (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952). Элемент $a \in T$ называется $\bigcap$-неприводимым, если в T не существует такого элемента a, что $a = a_1 \bigcap a_2$, $a_1 > a$, $a_2 > a$. Каждый элемент $q \in T$ является пересечением конечного числа r неповторяющихся $\bigcap$-неприводимых элементов. Число r называется рангом элемента q. Элемент $q \in T$ называется p-примарным, если из $xy \leqslant q$, $y \nleqslant q$ следует $x \leqslant p$. Для любого интервала $S = [q, p]$ структуры T — множество $\overline{S}$ всех p-примарных элементов из S является полной подполуструктурой интервала S относительно пересечения и подструктурой относительно упорядоченности в S.

Используя результаты другой своей статьи (реф. 7670), автор доказывает следующие теоремы:

1. Структура $\overline{S}$ является дедекиндовой структурой конечной длины.

2. Ранг элемента q равен длине λ интервала $[q, q : p]$ в структуре $\overline{S}$.

3. Для того чтобы элемент q был $\bigcap$-неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы он был примарен и чтобы не существовало никакого примарного элемента между q и $q : p$.

Для случая коммутативных колец с условием обрыва последняя теорема доказана Гробнером (Grobner W., Monatsh. Math. Osterreich, 1951, 55, 138—145). Л. М. Глускин

7685. **Об одном обобщении теории A-модулей Грунди. Круазо** (Sur une généralisation de la théorie des A-modules de Grundy. Croisot R.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 8, № 25, 1—33 (франц.)

В работе Лесьёра (реф. 7684) дана объединенная теория идеалов в полугруппах и кольцах. В таком же направлении в реферируемой статье с единой точки зрения изложена теория A-модулей Грунди (Grundy, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1942, 38, 242) и множеств, для которых данная полугруппа является областью операторов. Получено большое количество предложений, главным образом о представлении элементов частичных упорядоченных множеств с областью операторов в виде пересечения элементов специального типа. Как правило, они являются обобщением и продолжением указанных выше результатов Лесьёра. Л. М. Глускин

7686. **О радикале Джекобсона кольца. Сендрей** (On the Jacobson radical of a ring. Szendrei J.), Publs mat., 1955, 4, № 1—2, 93—97 (англ.)

Доказывается, что для произвольного идеала I ассоциативного кольца R совокупность всех элементов $r \in R$, для которых $r + I \in J(R/I)$ и $rI \subset J(I)$, совпадает с радикалом Джекобсона $J(R)$ кольца R. Отсюда вытекает, что кольцо R тогда и только тогда J-радикально, когда I-радикальны кольца I и R/I; кольцо R тогда и только тогда J-полупросто, когда оно содержит такой полупростой идеал I, что $r + I \notin J(R/I)$ для любого левого аннулятора $r \neq 0$ идеала I. В. А. Андрунакиевич

7687. **Квази ниль-кольца и радикал кольца. Се Бан-цзе** (近似詣零理想與根. 謝邦傑), 自然科學學報, Цзыжань Кэсюэ сюэбао, Acta Sci. Natur., 1956, № 1, 31—49 (кит.; рез. англ.)

Идеал A (левый, правый или двусторонний) кольца K называется квази ниль-идеалом, если для любого ненулевого двустороннего идеала M из K либо $M \supset A$, либо в фактор-кольце K/M идеал $(A + M)/M$ содержит ненулевой ниль-идеал (соответственно левый, правый или двусторонний). Доказывается, что сумма N всех квази ниль-идеалов в произвольном кольце K есть двусторонний идеал — радикал кольца K. Гомоморфный образ радикального кольца, т. е. кольца, совпадающего со своим радикалом, есть радикальное кольцо. Фактор-кольцо K/N — полупросто, т. е. не содержит ненулевых квази ниль-идеалов. Радикал N кольца K есть пересечение всех таких двусторонних идеалов, фактор-кольца по которым полупросты. Показывается, что N можно построить трансфинитным процессом аналогично построению радикала Бэра и, что всякий двусторонний идеал полупростого кольца есть полупростое кольцо. Если N — радикал кольца K, а N_m и K_m — соответственно полные матричные кольца над N и K, то N_m есть радикал кольца K_m. Даются достаточные условия, при которых радикал N совпадает с радикалом Бэра. Доказывается, что расширение радикального кольца при помощи радикального кольца есть радикальное кольцо. Наконец, аналогично Бэру, строится антирадикальный ряд и обобщаются некоторые результаты Бэра. В. А. Андрунакиевич

7688. **Йордановы гомоморфизмы. Херстейн** (Jordan homomorphisms. Herstein I. N.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 331—341 (англ.)

Пусть R' — ассоциативное кольцо, в котором из равенства $x'Ry' = 0$; $x', y' \in R$ следует, что либо $x' = 0$, либо $y' = 0$. Отображение φ ассоциативного кольца R на кольцо R' называется n-J-гомоморфизмом, если $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(a^n) = [\varphi(a)]^n$.

В предположении, что кольцо R' имеет характеристику, взаимно простую с $n!$, если $n > 2$, и с 6, если $n = 2$, а кольцо R обладает единицей, доказано, что $\varphi = \varepsilon\tau$, где τ — гомоморфизм или антигомоморфизм, а ε — некоторый центральный корень $(n-1)$-й степени из единицы кольца R'. А. И. Ширшов

7689. **Бесконечные кольца без бесконечных собственных подколец. Ковач** (Infinite rings without infinite proper subrings. Kovács Istvan), Publs mat., 1955, 4, № 1—2, 104—107 (англ.)

Доказывается, что любой собственный односторонний идеал (подкольцо) бесконечного ассоциативного кольца тогда и только тогда конечен, когда кольцо является либо телом (соответственно полем, являющимся объединением конечных полей $CF(p^{qk})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$), либо кольцом с нулевым умножением, аддитивная группа которого квазициклична.

В добавлении при корректуре автор указывает, что, как сообщил ему А. Г. Курош, утверждение для подколец вытекает из более общих результатов В. И. Шнейдмюллера (Матем. сб., 1950, 27 (69), 219—228). В. А. Андрунакиевич

7690. Нильпотентные артиновские кольца. Селе (Nilpotent artinian rings. Szele T.), Publs. mat., 1955, 4, № 1—2, 71—78 (англ.)

Изучается строение нильпотентных артиновских колец, т. е. нильпотентных колец с условием минимальности для левых идеалов. Доказывается, что нильпотентное артиновское кольцо удовлетворяет также условию минимальности для аддитивных подгрупп. Отсюда, на основании одной теоремы Куроша об абелевых группах с условием минимальности для подгрупп, следует, что всякое нильпотентное артиновское кольцо есть прямая сумма конечного числа нильпотентных артиновских p-колец, т. е. колец, аддитивная группа которых является p-группой. С другой стороны, доказывается, что всякое нильпотентное артиновское p-кольцо R содержит однозначно определенное конечное подкольцо R^* (ядро кольца R), и дается простой метод построения всех нильпотентных артиновских p-колец R с произвольно заданным ядром R^*. Таким образом, изучение нильпотентных артиновских колец сводится на изучение конечных нильпотентных p-колец. Кроме того, доказывается, что если нильпотентное кольцо R удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов, то его аддитивная группа удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, т. е. является прямой суммой конечного числа циклических групп.

Некоторые результаты автора частично пересекаются с результатами В. И. Шнейдмюллера (Мат. сб., 1950, 27 (69), 219—228). В. А. Андрунакиевич

7691. Антипростые и сильно идемпотентные кольца. Андрунакиевич В. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 1, 125—144

Кольцо K называется антипростым, если оно удовлетворяет любому из следующих равносильных условий: 1) кольцо K гомоморфно не отображается на подпрямо неразложимые кольца с идемпотентной сердцевиной, 2) любой ненулевой гомоморфный образ кольца K представим в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец с нильпотентной сердцевиной; 3) любой идеал кольца K гомоморфно не отображается на простое ненулевое кольцо, 4) любой идеал кольца K представим в виде пересечения идеалов, факторкольца по которым являются подпрямо неразложимыми кольцами с нильпотентной сердцевиной. Антипростым кольцом является, в частности, любое локально нильпотентное кольцо.

Идеал кольца K называется простым полумаксимальным идеалом, если фактор-кольцо по нему является подпрямо неразложимым кольцом с идемпотентной сердцевиной.

Пересечение R всех простых полумаксимальных идеалов кольца K является его радикалом в смысле Куроша (РЖМат, 1955, 1680) и называется антипростым радикалом.

R-полупростые кольца — это в точности подпрямые суммы подпрямо неразложимых колец с идемпотентной сердцевиной. В кольце с условием минимальности для всех идеалов антипростой радикал нильпотентен. Это утверждение обобщает аналогичный результат Левицкого (Levitzki J., Duke Math. J., 1943, 10, 553—556) для локально нильпотентных колец. Если в кольце выполнено условие максимальности лишь для главных идеалов, то антипростой радикал есть ниль-кольцо. Антипростой радикал полного матричного кольца K_n является полным матричным кольцом R_n над радикалом R кольца K. Следовательно, полное матричное кольцо K_n тогда и только тогда антипросто, когда антипросто кольцо K.

В работе рассматриваются также кольца, гомоморфно не отображающиеся на подпрямо неразложимые кольца с нильпотентной сердцевиной. Они названы сильно идемпотентными, так как это в точности кольца, у которых всякий идеал идемпотенген. Оказывается, что сильно идемпотентные кольца совпадают с f-регулярными кольцами Блэра, т. е. кольцами, у которых для любого элемента a справедливо соотношение $a \in (a)^2$. Их можно охарактеризовать также, как сильно R-полупростые кольца, т. е. как такие кольца, всякий гомоморфный образ которых является R-полупростым. Обратно, антипростые кольца — это в точности сильно F-полупростые кольца, где F — сильно идемпотентный радикал (РЖМат, 1955, 1681). В произвольном кольце K справедливо равенство $F \cap R = 0$, причем R есть наибольший среди всевозможных радикалов в смысле А. Г. Куроша, имеющих (в произвольном кольце) нулевое пересечение с F и, обратно, F есть наибольший радикал, имеющий нулевое пересечение с R. В кольце с условием минимальности для главных правых идеалов сильно идемпотентный радикал совпадает с регулярным радикалом (т. е. с радикалом, соответствующим по А. Г. Курошу классу регулярных колец).

Кроме того, в работе устанавливается ряд результатов, относящихся к различным сильно полупростым кольцам. В частности, доказывается, что если в сильно идемпотентном кольце K аннулятор всякого простого полумаксимального идеала отличен от нуля, то K есть дискретная прямая сумма простых ненулевых колец.

В. И. Шнейдмюллер

7692. Телообразные алгебры. Гика (Algebre corpoidale. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 2, 239—243 (рум.; рез. русск., франц.)

Алгебра A с единицей e над полем K называется телообразной, если она порождается мультипликативной группой G своих обратимых элементов. Так как $\lambda x \in G$ для любых элементов $x \in G$ и $\lambda \in K^*$, где K^* — мультипликативная группа тела K, то любой элемент телообразной алгебры A является конечной суммой элементов группы G. Следовательно, A с единицей e над полем K тогда и только тогда телообразна, когда A обладает базисом, состоящим из обратимых элементов. Оказывается, что для любой телообразной алгебры A над полем K существует подгруппа H группы G, изоморфная факторгруппе G/K^*e и являющаяся системой образующих алгебры A. Любая алгебра с единицей над полем K содержит телообразную алгебру с той же группой обратимых элементов. В работе показано, что ряд свойств нормированных векторных пространств можно распространить на унитарные модули над телообразными алгебрами. В. А. Андрунакиевич

7693. Аннуляторные кольца. Вулфсон (Annihilator rings. Wolfson Kenneth G.), J. London Math. Soc., 1956, 31, №1, 94—104 (англ.)

Аннуляторным кольцом называется топологическое кольцо, в котором правый (левый) аннулятор любого собственного замкнутого левого (правого) идеала отличен от нуля. Аннуляторным кольцом является, например, любое дуальное кольцо в смысле Капланского, т. е. топологическое кольцо, каждый замкнутый односторонний идеал которого является аннулятором. В произвольном аннуляторном кольце аннуляторами являются, вообще говоря, лишь максимальные односторонние идеалы. Основная теорема: Для любого простого аннуляторного кольца K с замкнутыми максимальными правыми идеалами существует такая пара взаимносопряженных топологических векторных пространств над некоторым телом, что кольцо K топологически изоморфно некоторому подкольцу кольца всех

непрерывных (в слабой топологии) линейных преобразований одного из этих пространств, содержащему в качестве плотного подкольца кольцо всех непрерывных линейных преобразований конечного ранга. Из этой теоремы вытекает, что простое (не радикальное) дискретное аннуляторное кольцо удовлетворяет условию минимальности и поэтому изоморфно полному матричному кольцу над некоторым телом.

Любое аннуляторное кольцо K, пересечение всех замкнутых максимальных модулярных идеалов которого равно нулю, содержит в качестве плотного подкольца прямую сумму минимальных замкнутых двусторонних идеалов, являющихся простыми аннуляторными кольцами с замкнутыми максимальными правыми идеалами. Отсюда следует, что полупростое (в смысле Джекобсона) дискретное аннуляторное кольцо есть прямая сумма (может быть, бесконечного числа) простых колец с условием минимальности. Поэтому полупростое дискретное аннуляторное кольцо является дуальным кольцом. Указаны и другие классы колец, в которых любое аннуляторное кольцо дуально.

В. А. Андрунакиевич

7694. Некоторые теоремы о внешних алгебрах. **Вивье** (Sur quelques théorèmes d'algèbre extérieure. Vivier Marcel), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1956, 73, № 3, 203—281 (франц.)

Пусть E_n — комплексное n-мерное векторное пространство и $X_1, \ldots, X_n$ — его базис. Рассматривается внешняя алгебра $\mathfrak{A}$ над пространством E_n, т. е. алгебра с образующими $1, X_1, \ldots, X_n$ и соотношениями $X_iX_j = -X_jX_i$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Элементы вида $\lambda X_{i_1} \ldots X_{i_k}$ (λ — число и $i_1 < \ldots < i_k$) называются одночленами, их суммы — многочленами, однородные многочлены степени p — формами степени p. Автор строит аппарат дифференцирования многочленов. При этом производной многочлена Φ относительно одночлена $\alpha = X_{i_1} \ldots X_{i_k}$ называется такой многочлен $\partial\Phi/\partial\alpha$, не содержащий ни одной из букв $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$, что $\Phi = \alpha\,\partial\Phi/\partial\alpha + R$, где ни один из одночленов многочлена R не делится на α. Рангом формы Φ называется минимальное число векторов пространства E_n, через которые можно выразить эту форму; подпространство, натянутое на эти векторы, называется собственным подпространством формы. Оказывается, что это подпространство порождается векторами $\partial\Phi/\partial\alpha$, где α — произвольный одночлен степени на единицу меньшей степени формы. Ранг формы равен её степени тогда и только тогда, когда форма проста, т. е. является произведением нескольких векторов из E_n.

Автор излагает общий метод отыскания аннуляторов заданной формы Φ, т. е. таких многочленов $G \in \mathfrak{A}$, что $G\Phi = 0$. Полностью исследуются случаи, когда Φ является суммой двух или трех одночленов, причем в первом случае оказывается, что G является суммой простых аннуляторов формы Φ. Далее, предполагается, что $n = 2dm$, автор фиксирует в алгебре $\mathfrak{A}$ некоторую форму Δ степени $2d$ и ранга $2dm$; в некотором базисе эта форма имеет вид $\Delta = \sum_{i=1}^{m} a_i$, где a_i — такие одночлены, что $a_ia_j \neq 0$. Полной производной многочлена Φ относительно Δ называется выражение $\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\Phi}{\partial a_i}$. Изучение свойств первой производной показывает, что всякая форма F однозначно представима в виде $F = \sum_{i=0}^{m} a_i\Delta^i$, где $da_i/\partial\Delta = 0$ $(i = 0, \ldots, m)$ (для $d = 1$ это известный результат Лепажа). Из этого разложения выводится, что любой аннулятор формы четной степени, имеющий вид $\sum_{i=1}^{m} a_i$, где $a_ia_j \neq 0$, является суммой простых аннуляторов.

А. Л. Онищик

7695. Операторные алгебры, обладающие точным слабо замкнутым представлением. **Кейдисон** (Operator algebras with a faithful weakly-closed representation. Kadison Richard V.), Ann. Math., 1956, 64, № 1, 175—181 (англ.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ допускает точное представление в виде кольца операторов, т. е. слабо замкнутой C^*-алгебры, действующей в некотором гильбертовом пространстве. В частности доказывается, что такое представление существует тогда и только тогда, когда 1) любая ограниченная монотонно возрастающая направленная последовательность $\{A_\gamma\}$ самосопряженных элементов $A_\gamma \in \mathfrak{A}$ имеет наименьшую верхнюю грань $A \in \mathfrak{A}$ и 2) $\mathfrak{A}$ обладает «разделяющим» семейством состояний $\{\omega_\alpha\}$ (т. е. таким семейством, что если для положительного элемента $B \in \mathfrak{A}$ и всех α имеет место равенство $\omega_\alpha(B) = 0$, то $B = 0$), для которого направленная последовательность $\{\omega_\alpha(A_\gamma)\}$ имеет предел $\omega_\alpha(A)$ какова бы ни была направленная последовательность $\{A_\gamma\}$ указанного выше вида.

М. И. Граев

7696. О мультипликативных идемпотентах потентного полукольца. **Бурн** (On multiplicative idempotents of a potent semiring. Bourne Samuel), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 9, 632—638 (англ.)

Множество с двумя всюду определенными бинарными ассоциативными операциями — сложением и умножением называется полукольцом, если умножение дистрибутивно относительно сложения как слева, так и справа. Для полуколец естественным путем определяются понятия нуля, мультипликативного идемпотента, аддитивного идемпотента, полукольца с делением, правого (левого) идеала, двустороннего идеала, суммы и произведения правых идеалов и нильпотентного идеаал. Полукольцо называется потентным, если оно не содержит ненулевых нильпотентных идеалов как левых, так и правых. Основной результат работы: Если каждый двусторонний идеал потентного полукольца содержит минимальный левый идеал в минимальный правый идеал, то в произвольном ненулевом правом идеале содержится мультипликативный идемпотент.

Ю. И. Соркин

7697. К теории колец-логик. **Адил Якуб** (On the theory of ring-logics. Adil Yaqub), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 323—328 (англ.)

Строится пример кольца-логики с ненулевым радикалом (Foster A. L., Amer. J. Math., 1950, 72, 101—123).

Ю. А. Шиханович

7698. Существование дифференцирований в кольцах непрерывных преобразований. **Розенберг, Зелинский** (Extension of derivations in continuous transformation rings. Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 2, 453—458 (англ.)

Пусть M, N — двойственные векторные пространства над телом D, A — кольцо непрерывных (в слабой топологии) линейных преобразований пространства M и C — примитивное подкольцо кольца A с нулевым цоколем S. Оказывается, что если S содержится в цоколе кольца A, C содержит слабое подкольцо Галуа C_0 кольца A и $MS = M$, $NS^* = N$, то любое дифференцирование δ кольца C в кольцо A, для которого $C_0\delta = 0$, может быть продолжено до внутреннего дифференцирования кольца A. Аналогичный результат имеет место, если C — примитивная подалгебра кольца A над его центром, удовлетворяющая некоторым условиям типа конечности.

М. И. Граев

7699. Дифференцирования в простых кольцах. Амицур (Derivations in simple rings. Amitsur S. A.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 25, 87—112 (англ.)

Рассматривается кольцо $A[t]$ дифференциальных многочленов от одного неизвестного t (см., например, РЖМат, 1957, 6208) относительно дифференцирования D, действующего в простом кольце A (случай простого нильпотентного кольца исключается). Пусть $\mathcal{E}$ — кольцо эндоморфизмов аддитивной группы кольца A, A_R и A_L — его подкольца, образованные операторами a_R и a_L соответственно правого и левого умножения на элементы $a \in A$, а $\mathcal{E}_L$ и $\mathcal{E}_R$ — централизаторы подколец A_R и A_L соответственно. В кольце $\mathcal{E}$ можно ввести дифференцирование (сохраняющее подкольца $\mathcal{E}_L$ и $\mathcal{E}_R$) по формуле: $a' = Da - aD$. Элементы колец $\mathcal{E}_L$ и $\mathcal{E}_L[t_L]$ (где t_L — левое умножение на t в кольце $A[t]$) можно рассматривать как операторы, действующие в кольце $A[t]$.

Оказывается, что любой двусторонний идеал кольца $A[t]$ имеет вид $\pi(t_L)A[t]$, где $\pi(t_L)$ — многочлен от t_L со старшим коэффициентом, равным единице, принадлежащий центру кольца $\mathcal{E}_L[t_L]$. С другой стороны, центр кольца $\mathcal{E}_L[t_L]$ является кольцом многочленов $Z_0[\zeta(t_L)]$, где Z_0 — совокупность всех таких элементов $\alpha \in \mathcal{E}_R \cap \mathcal{E}_L$, что $\alpha' = 0$, а $\zeta(t_L)$ — некоторый (однозначно определенный) многочлен со старшим коэффициентом, равным единице. Если кольцо A имеет характеристику $p \geqslant 0$, то либо $\zeta(t_L) = 1$, либо

$$\zeta(t_L) = t_L^{p^r} + t_L^{p^{r-1}}\alpha_1 + \ldots + t_L\alpha_r + \gamma,$$

где $\alpha_i \in z_0$ и $\gamma' = 0$. В последнем случае все элементы кольца $\mathcal{E}_L$ удовлетворяют уравнению

$$z^{(p^r)} + \alpha_1 z^{(p^{r-1})} + \ldots + \alpha_r z' + \gamma z - z\gamma = 0.$$

Рассматривается также вопрос о наличии универсального уравнения для A, т. е. уравнения вида:

$$\alpha_n z^{(n)} + \alpha_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + \alpha_0 z = 0,\ \alpha_n \neq 0,\ \alpha_i \in \mathcal{E}_L,$$

удовлетворяющегося для любого $z \in A$. Доказывается, что для существования универсального уравнения необходимо и достаточно, чтобы указанный выше элемент γ был алгебраичен над кольцом Z_0. Если $F(x) = 0$ — минимальное уравнение для γ над Z_0, то в этом случае минимальное универсальное уравнение имеет вид $F(\zeta(D)) = 0$, где $F(x)$ — минимальный многочлен элемента γ. Для кольца характеристики нуль это условие сводится к тому, чтобы D было внутренним дифференцированием, определяемым элементом алгебраичным над Z_0.

Далее изучаются минимальное кольцо $\mathfrak{R}_\gamma$ и минимальное кольцо Ли $\mathfrak{L}_\gamma$, порожденные элементами вида $D^\nu a$, $a \in A$. Условия того, что $\mathfrak{R}_\gamma \neq A$ или $\mathfrak{L}_\gamma \neq [A, A]$, описываются в терминах универсальных уравнений, имеющих степень, ограниченную функцией от γ. Доказывается, что если A не является центральной алгеброй порядка 4 над полем характеристики 2, то любой идеал Ли кольца A либо содержит кольцо $[A, A]$, либо содержится в центре кольца A (ср. РЖМат, 1956, 1140).

В заключение для любого подкольца $T \subset A$ определяется строение кольца S, состоящего из всех элементов $x \in A$, для которых $[x, A] \subset T$. Доказывается, что совокупность N элементов $s \in S$, для которых $s^2 = 0$, является его радикалом Джекобсона, причем фактор-кольцо S/N (если оно отлично от нуля) изоморфно центру кольца A или его чисто несепарабельному расширению (последнее может иметь место лишь для колец характеристики 2). Аналогичные результаты имеют место и для подколец Ли.

И. З. Розенкноп

7700. О модулях представлений разрешимых алгебр Ли. Кошуль (Sur les modules de représentation des algebres de Lie résolubles. Koszul J. L.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 535—554 (франц.)

В основном работа посвящена доказательству следующей теоремы, анонсированной автором ранее (РЖМат, 1954, 1585): Для любой разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (над полем k) и любого конечномерного $\mathfrak{G}$-модуля M любой элемент из $H^p(\mathfrak{G}, M)$, $p > 0$, является исчезающим (в другой терминологии, уничтожаемым; см. РЖМат, 1956, 7202) классом когомологий. (Обратное утверждение доказывается сравнительно просто даже в следующем усиленном виде: если все классы из $H^3(\mathfrak{G}, k)$ исчезающие, то алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима).

Пусть $E(\mathfrak{G})$ — обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}(E(\mathfrak{G}), M)$ — $\mathfrak{G}$-модуль линейных отображений алгебры $E(\mathfrak{G})$ в модуль M, $\mathfrak{L}_f(E(\mathfrak{G}), M)$ — подмодуль модуля $\mathfrak{L}(E(\mathfrak{G}), M)$, состоящий из всех элементов u, для которых модуль $E(\mathfrak{G})u$ имеет конечную размерность, и φ_M — отображение $M \to \mathfrak{L}_f(E(\mathfrak{G}), M)$, задаваемое формулой: $(\varphi_M a)e = ea$, $a \in M$, $e \in E(\mathfrak{G})$. Оказывается, что класс $c \in H^*(\mathfrak{G}, M)$ тогда и только тогда исчезающий, когда $\varphi_M c = 0$.

Так как $\mathfrak{L}_f(E(\mathfrak{G}), M) = \mathfrak{L}_f(E(\mathfrak{G}), k) \otimes M$, то достаточно ограничиться изучением модуля $\mathfrak{L}_f(E(\mathfrak{G}), k) = V(\mathfrak{G})$. В случае, когда k — поле действительных чисел, и группа G, отвечающая алгебре $\mathfrak{G}$, односвязна, коцепи алгебры $\mathfrak{G}$ над модулем $V(\mathfrak{G})$ можно интерпретировать как дифференциальные формы на группе G. Эти формы характеризуются тем, что для каждой из них среди форм, получающихся при применении правых сдвигов, имеется лишь конечное число линейно независимых форм. Коцепям алгебры $\mathfrak{G}$ над модулем $W(\mathfrak{G})$, состоящим из отображений $u \in V(\mathfrak{G})$, для которых операторы из $\mathfrak{G}$ на подмодуле $E(\mathfrak{G})u$ нильпотентны, соответствуют дифференциальные формы, для которых инфинитезимальные преобразования (соответствующие правым сдвигам) нильпотентны.

Используя фильтрацию алгебры коцепей, соответствующую некоторому идеалу $b \subset \mathfrak{G}$, автор показывает, что сквозное отображение

$$H^*(\mathfrak{G}, W(\mathfrak{G})) \to H^*(b, W(\mathfrak{G})) \to H^*(b, W(b))$$

является изоморфизмом, если алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна и размерность идеала b равна $n-1$, где n — размерность алгебры $\mathfrak{G}$; отсюда по индукции следует, что $H^p(\mathfrak{G}, W(\mathfrak{G})) = 0$, если $p > 0$. Далее доказывается, что если алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима и $b = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, то сквозное отображение $H^*(\mathfrak{G}, V(\mathfrak{G})) \to H^*(b, V(\mathfrak{G})) \to H^*(b, W(b))$ является изоморфизмом. Сопоставляя этот результат с предыдущим, получаем, что для разрешимой алгебры $H^p(\mathfrak{G}, V(\mathfrak{G})) = 0$, если $p > 0$. Сформулированная выше теорема вытекает отсюда непосредственно. И. З. Розенкноп

7701. Границы для индексов нильпотентных и разрешимых алгебр Ли. Паттерсон (Bounds for the indices of nilpotent and solvable Lie algebras. Patterson E. M.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1954—1955, **A64**, № 2, 200—208 (англ.)

Устанавливаются границы для индекса разрешимости нильпотентных алгебр Ли конечного ранга. Для разрешимых алгебр Ли конечного ранга то же

самое делается в предположении, что основное поле без характеристики. В конце работы приводится ряд примеров, показывающих точность установленных границ А. И. Ширшов

7702. Подкольца свободных колец Ли. Витт (Die Unterringe der freien Lieschen Ringe. Witt Ernst), Math. Z., 1956, 64, № 2, 195—216 (нем.)

Автором была анонсирована (РЖМат, 1954, 2531) теорема, независимо от него доказанная референтом (РЖМат, 1954, 2030), о том, что всякая подалгебра свободной алгебры Ли свободна. В настоящей заметке подробно излагается доказательство этого утверждения, а также изучаются Σ-операторные кольца, без предположения, что Σ — поле. Исследование автора охватывает и ограниченные алгебры Ли.

А. И. Ширшов

7703. Одно свойство специальных йордановых алгебр. Альберт (A property of special Jordan algebras. Albert A. A.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 9, 624—625 (англ.)

Пусть A — йорданова алгебра конечного ранга над полем характеристики, отличной от двух, являющаяся гомоморфным образом специальной йордановой алгебры конечного ранга. Доказано, что факторалгебра алгебры A по ее радикалу специальна. Отсюда следует, что простая исключительная йорданова алгебра не является гомоморфным образом никакой специальной йордановой алгебры конечного ранга.

Таким образом, оказывается, что предположение Джекобсона о том, что каждая йорданова алгебра конечного ранга является гомоморфным образом специальной йордановой алгебры конечного ранга, неверно. А. И. Ширшов

7704. Одна теорема о структуре J-алгебр. Джейкобсон (A theorem on the structure of Jordan algebras. Jacobson N.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 3, 140—147 (англ.)

Пусть каждый элемент конечномерной J-алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей e над полем Φ представляется в форме $xe+z$, где $x\in\Phi$, а z — нильпотентный элемент. Тогда $\mathfrak{A}=\Phi e+\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — нильалгебра. Ранее этот результат был известен только для специальных J-алгебр.

Л. А. Скорняков

7705. О левых центрах тела Брука. Сан-Суси (On the left nucleus of a Bruck ring. San Soucie R. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 961—962 (англ.)

Левым центром (ядром) кольца R называется множество таких элементов $z\in R$, что $(za)b=z(ab)$ для любых $a,\ b\in R$. Доказывается, что левый центр тела Брука (РЖМат, 1956, 1137) является совершенным полем. Отсюда выводится, что существуют бесконечные кольца Брука. Л. А. Скорняков

7706. Характеризация непрерывной геометрии с помощью группы делителей единицы. Эрлих (Characterization of a continuous geometry within the unit group. Ehrlich Gertrude), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 2, 397—416 (англ.)

Изложение ранее опубликованных результатов автора (РЖМат, 1956, 7216). Л. А. Скорняков

7707. Некоторые вопросы вещественности. Сегре (Alcune questioni di realta. Segre Beniamino), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn Torino, 1953—1954, 13, 31—32 (итал.)

Для данных целых чисел $n\geqslant 1$ и $\rho\leqslant n-1$ обозначим через $\delta=\delta(n,\rho)$ минимальное целое число, для которого любая линейная система ∞^δ действительных квадрик в пространстве S_n содержит некоторую квадрику, на которой лежит действительное пространство S_ρ. Утверждается, что $\delta(n,\rho)=\frac{r(r+1)}{2}$, где $r=2\rho-n+1$, если только $\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\rho<n$ и нечетно число

$$K_{r,n}=\begin{cases}\dfrac{0!\,2!\,\ldots\,(r-1)!}{r!(r+2)!\,\ldots(2r-1)!}\cdot\dfrac{(n+1)!\,(n+3)!\,\ldots(n+r)!}{(n-r+1)!\,(n-r+3)!\,\ldots\,n!} & (r-\text{нечетно}),\\ \dfrac{0!\,2!\,\ldots\,(r-2)!}{(r+1)!\,(r+3)!\,\ldots\,(2r-1)!}\cdot\dfrac{(n+2)!\,(n+4)!\,\ldots\,(n+r)!}{(n-2+1)!\,(n-2+3)!\,\ldots\,(n-1)!} & (r-\text{четно}).\end{cases}$$

Эти условия выполняются, например, когда

$$n=2^h+(k-1)\,2^{h+1}\ \text{и}\ \rho=k\cdot 2^h-1,$$

где h и k — любые целые положительные числа. В частности, при $k=1$ получается результат, обобщающий одну из теорем Хопфа, доказанную им топологическими методами. С другой стороны, из сформулированного утверждения вытекает следующее предложение Тольятти: В четномерном пространстве $S_{2\rho}$ любой пучок действительных квадрик содержит квадрику, которой принадлежит действительное пространство S_ρ. С. С. Бюшгенс

7708. Алгебры с данной конечной дистрибутивной структурой идеалов. Беренс (Algebren mit vorgegebenem endlichen, distributiven Idealverband. Behrens Ernst-August), Math. Ann., 1957, 133, № 1, 79—90 (нем.)

Рассматриваются алгебры того же типа, что и в РЖМат, 1957, 6198 (такие алгебры называются допустимыми). Структура идеалов допустимой алгебры конечна и дистрибутивна. Для любого поля P и любой конечной дистрибутивной структуры L длины s существует допустимая алгебра A ранга s над полем P, структура идеалов которой изоморфна структуре L. Доказано также, что для алгебр с единицей следующие свойства равносильны: 1) алгебра полупроста в смысле Смайли; 2) алгебра обладает максимальной цепью идеалов с факторами, не являющимися алгебрами с нулевым умножением (все такие алгебры допустимы); 3) алгебра является прямой суммой простых колец с единицей; 4) каждый идеал алгебры идемпотентен: 5) структура идеалов алгебры является конечной булевой алгеброй, причем пересечение двух идеалов совпадает с их произведением.

Л. А. Скорняков

7709. О двух структурных теоремах Биркгофа—Фринка для общих алгебр. Динер (Über zwei Birkhoff—Frinksche Struktursätze der allgemeinen Algebra. Diener Karl-Heinz), Arch. Math., 1956, 7, № 5, 339—345 (нем.)

Полная структура называется алгебраической, если она изоморфна структуре всех подалгебр некоторой общей алгебры (в смысле Биркгофа). Автор анализирует необходимые и достаточные условия алгебраичности структуры, данные Биркгофом и Фринком (Birkhoff G., Frink O., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 299—316) и Бюхи (Büchi R., Portug. math., 1952, 11, 151—167). В связи с этим рассмотрены некоторые вопросы, связанные с представимостью элементов алгебраической структуры через другие элементы этой структуры. Ю. И. Соркин

7710. Одно тождество для l-групп. Калман (An identity for l-groups. Kalman J. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 931—932 (англ.)

Для произвольных l-групп доказывается тождество $|a\cup c-b\cup c|+|a\cap c-b\cap c|=|a-b|$, доказанное Биркгофом (Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, 407) для векторных структур.

Е. Н. Мочульский

7711. Атомные структуры с единственными сравнимыми дополнениями. Мак-Лафлин (Atomic lattices with unique comparable complements. McLaughlin J. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 864—866 (англ.)

Доказано, что если в атомной структуре с дополнениями из соотношений $x+y=x+z=1$, $xy=xz=0$ и $y\geqslant z$ следует, что $y=z$, то структура модулярна. Отсюда, в частности, следует, что каждая атомная структура с единственными дополнениями является булевой алгеброй. Е. Н. Мочульский

7712. Об аксиомах Бэра и Куроша в модулярных структурах. Дуингер, Грот (On the axioms of Baer and Kurosh in modular lattices. Dwinger Ph., Groot J. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 5, 596—601; Indagationes math., 1956, **18**, № 5, 596—601 (англ.)

Полная структура называется вполне модулярной структурой, если для любой системы элементов x_α, y_α из соотношений $x_\alpha\leqslant y_\alpha$, $\alpha\neq\beta$, следует, что $(\sum x_\alpha)(\prod y_\alpha)=\sum x_\alpha y_\alpha$ (Курош, Изв. АН СССР, 1943, 7, 185—202). Говорят, что полная структура удовлетворяет условию Бэра, если из соотношений $y<z\leqslant\sum x_\alpha$ следует, что в системе элементов x_α существует конечная подсистема $\{x_1, \ldots, x_n\}$, для которой $y\sum x_i<z\sum x_i$. Известно, что полная модулярная структура, удовлетворяющая условию Бера, вполне модулярна. В работе строится пример счетной вполне модулярной (даже дистрибутивной и удовлетворяющей условию минимальности) структуры, не удовлетворяющей условию Бэра. Е. Н. Мочульский

7713. Мультипликативные функции на евклидовых и звездных структурах. Клейн-Бармен (Multiplikative Funktionen über Euklidischen und Sternverbänden. Klein-Barmen Fritz), J. reine und angew. Math., 1955, **195**, № 3—4, 121—126 (нем.)

Изучается теоретико-структурный аналог известной теоретико-числовой теоремы обращения для мультипликативных функций.

Рассматривается дистрибутивная структура M с наименьшим элементом e. Отличный от e элемент $x\in M$ называется примарным, если подструктура всех элементов, меньших x, линейно упорядочена. Элементы $x, y\in M$ называются чуждыми, если $x\cap y=e$. Структура M называется евклидовой, если каждый ее элемент единственным образом представляется в виде объединения попарно чуждых примарных элементов. Евклидова структура, в которой для каждого элемента существует лишь конечное число меньших элементов, называется звездной. Число элементов, меньших некоторого примарного элемента x звездной структуры, называется степенью этого элемента. Примарные элементы степени 1 (т. е. являющиеся атомами) называются простыми элементами. Примарный элемент x степени ξ рассматривается как «ξ-тая степень» простого элемента $p\leqslant x$ и обозначается через $p^{[\xi]}$. Дополнительно полагается, что $p^{[0]}=e$. Таким образом любой элемент звездной структуры обладает единственным представлением вида $\bigcup_{\nu=1}^{n} p_\nu^{[\xi_\nu]}$.

Числовая функция $\varphi(x)$, определенная на евклидовой структуре M, называется мультипликативной, если $\varphi(a\cup b)=\varphi(a)\varphi(b)$ для любых элементов $a, b\in M$. Если M — звездная структура и $x=\bigcup_{\nu=1}^{n} p_\nu^{[\xi_\nu]}$ — ее произвольный элемент, то формулы

$$S\varphi(x)=\sum_{0}\sum_{\lambda_\nu}\sum_{\xi_\nu}\varphi\left(\bigcup_{\nu=1}^{n}p_\nu^{[\lambda_\nu]}\right),$$

$$R\varphi(x)=\sum_{0}\sum_{\lambda_\nu}\sum_{\xi_\nu}\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{n}p_\nu^{[\lambda_\nu]}\right)\varphi\left(\bigcup_{\nu=1}^{n}p^{[\xi_\nu-\lambda_\nu]}\right),$$

где μ — мультипликативная функция, для которой

$$\mu(p^{[\xi]})=\begin{cases}-1, & \text{если } \xi=1,\\ 0, & \text{если } \xi\geqslant 2,\\ -1, & \text{если } \xi=0,\end{cases}$$

определяют на множестве всех мультипликативных функций два оператора S и R. Основной результат работы: операторы S и R взаимно обратны.

Ю. И. Соркин

7714. Представление аддитивных на булевых алгебрах функций как функций множества. Бауэр (Darstellung additiver Funktionen auf Booleschen Algebren als Mengenfunktionen. Bauer H.), Arch. Math., 1955, **6**, № 3, 215—222 (нем.)

Пусть $\mathfrak{B}'$ — булева алгебра с нулем 0 и единицей E и f — конечная, вещественная, неотрицательная функция, определенная на некоторой подалгебре $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{B}'$. Функция f называется σ-аддитивной на $\mathfrak{B}$ относительно $\mathfrak{B}'$, если для любой последовательности $\{A_i\}$ попарно непересекающихся элементов $A_i\in\mathfrak{B}$, для которой существует объединение в $\mathfrak{B}'$, принадлежащее $\mathfrak{B}$, справедливо равенство $f(\bigvee_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}f(A_i)$. Аддитивная функция f называется чисто конечно-аддитивной относительно $\mathfrak{B}'$, если для каждой σ-аддитивной относительно $\mathfrak{B}'$ функции g из неравенства $0\leqslant g\leqslant f$ следует, что $g=0$.

В одной из предыдущих работ (Bauer H., Sitzungsber. Math.-naturwiss, 1953, 89—117) автор доказал, что каждая аддитивная функция f единственным образом представляется как сумма σ-аддитивной функции $f_e\geqslant 0$ и чисто конечно-аддитивной функции $f_p\geqslant 0$. Оказывается, что для каждого $A\in\mathfrak{B}$

$$f_e(A)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i);\quad A=\bigvee_{i=1}^{\infty}x_i,\ x_i\in\mathfrak{B},$$

$$x_i\wedge x_j=0,\ \text{если } i\neq j$$

Изоморфизм Ψ алгебры $\mathfrak{B}'$ на булеву алгебру множеств $\Psi\mathfrak{B}'$, с носителем H, называется отделимым, если для каждых двух точек p и q из H существует такой элемент $A\in\mathfrak{B}'$, что $p\in\Psi A$, $q\notin\Psi A$. Оказывается, что заданная на $\mathfrak{B}$ аддитивная функция f тогда и только тогда σ-аддитивна (чисто конечно-аддитивна) относительно $\mathfrak{B}'$, когда для каждого (по крайней мере для одного) отделимого изоморфизма Ψ алгебры $\mathfrak{B}'$ на булеву алгебру множеств $\Psi\mathfrak{B}'$ с некоторым носителем H функция f_Ψ σ-аддитивна (чисто конечно-аддитивна) на $\Psi\mathfrak{B}$ относительно алгебры всех подмножеств множества H (ср. РЖМат, 1954, 2036). Кроме того, для любой заданной на $\mathfrak{B}$ аддитивной функции существует такой отделимый изоморфизм Ψ алгебры $\mathfrak{B}'$ на булеву алгебру множеств, что $(f_\Psi)_e=(f_e)_\Psi$ и $(f_\Psi)_p=(f_p)_\Psi$.

Г. Я. Арешкин

7715. О B-покрытиях структур. Мацусима (On the B-covers in lattices. Matsushima Yataro), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 8, 549—553 (англ.)

Доказано, что структура S тогда и только тогда дистрибутивна, когда $G(a, b)=M(a, b)$ для любых $a, b\in S$, а также тогда и только тогда, когда из соотношений $a\cup b=c\cup d$ и $a\cap b=c\cap d$ следует, что $G(a, b)=G(c, d)$ (обозначения см. РЖМат, 1957, 206).

Этот результат несовместим с первым утверждением из РЖМат, 1957, 206, для которого, впрочем, референтом построен противоречащий пример.
Л. А. Скорняков

7716. Недедекиндова связная компактная топологическая структура. Эдмондсон (A nonmodular compact connected topological lattice. Edmondson E. Don), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1157—1158 (англ.)

Строится пример недедекиндовой структуры, элементы которой образуют связное компактное топологическое пространство, а структурные операции непрерывны в этой топологии. Л. А. Скорняков

7717 К. Проективные плоскости и смежные вопросы. Холл (Projective planes and related topics. Hall Marshall, Jr. California Institute of Technology, 1954, vi, 77 pp.) (англ.)

Брошюра содержит пять лекций, прочитанных в апреле 1954 г. в Калифорнийском технологическом институте, в которых подытоживается развитие теории проективных плоскостей до 1953 г. Каждая лекция оканчивается достаточно обширной библиографией. Цитата из предисловия: «В последние годы наблюдается оживление в исследованиях по основаниям проективной геометрии, причем особый интерес к этой области наблюдался главным образом в нашей стране и в России». Можно добавить, что в 1953 г. активная группа исследователей проективных плоскостей появилась и в Германии.

Лекция I, «Проективные плоскости», содержит аксиомы инцидентности, определение свободной плоскости, теорему о том, что любая подплоскость свободной плоскости свободна, и описание координатизации плоскости тернаром.

Лекция II, «Вопросы теории структур», рассматривает проективные пространства как структуры. Проективные пространства (отождествленные со структурой своих подпространств) совпадают со структурно-неразложимыми атомичными дедекиндовыми структурами с относительными дополнениями. Проективную плоскость тогда и только тогда можно вложить в пространство высшей размерности, когда эта плоскость дезаргова. Автор исследует более сложный вопрос о вложении дедекиндовых структур в дедекиндовы структуры с дополнениями. Обращаясь к представлению структур, автор замечает, что любую структуру можно представить как подструктуру $\mathfrak{A}$ структуры всех отношений эквивалентности подходящего множества U. Подструктуру $\mathfrak{A}$ и множество U можно выбрать так, чтобы для каждой пары E_1, $E_2 \in U$ объединение $E_1 \cup E_2$ имело бы один из следующих типов (тип с большим номером включается в тип с меньшим номером): (1) $E_1 \cup E_2 = E_1E_2 = E_2E_1$; (2) $E_1 \cup E_2 = E_1E_2E_1 = E_2E_1E_2$; (3) $E_1 \cup E_2 = E_1E_2E_1E_2 = E_2E_1E_2E_1$. Тип (2) характеризует дедекиндовы структуры. Структуры типа (1) характеризуются частично; в частности, среди проективных плоскостей только дезарговы имеют представление типа (1).

Лекция III, «Вопросы теории колец», касается эквивалентности между некоторыми (геометрическими) аксиомами, выполняющимися в проективной плоскости и (алгебраическими) аксиомами, выполняющимися в соответствующем тернаре. Аффинная малая теорема Дезарга соответствует аксиомам веблен-веддербарнова тела, (полная) теорема Дезарга — аксиомам ассоциативного тела, проективная малая теорема Дезарга — аксиомам альтернативного тела. Заслуживающей внимания стороной лекции является полное определение строения альтернативных тел, не являющихся ассоциативными, собранное из десяти работ восьми авторов. Исследуются также геометрические аксиомы, соответствующие телу с правым обратным свойством (т. е. удовлетворяющие соотношению $a^{-1}(ab) = b$ — *прим. перев.*), но полного доказательства того, что такие кольца являются альтернативными, не дано.

Лекция IV, «Вопросы теории групп». Одним из инвариантов проективной плоскости является группа проективитетов (произвольно выбранной) прямой этой плоскости в себя. Эта группа трижды транзитивна. Требование, что подгруппа, оставляющая на месте три различные точки, имеет порядок 1, эквивалентно теореме Паппа, которая влечет теорему Дезарга. Вторым инвариантом является группа коллинеаций. Последняя может быть очень большой: в дезарговом случае она состоит из однородных трехмерных полулинейных преобразований над ассоциативным телом. Но она может и состоять из одного тождественного преобразования, как показывается с помощью подходящей бесконечной плоскости. Если R-тернар с тернарной операцией $x \cdot m \circ b$, то он характеризуется множеством подстановок $x \to x \cdot m \circ b$ $(m \neq 0)$. Это множество является группой тогда и только тогда, когда $xy \circ z = xy + z$, где $(R, +, \cdot)$ — неополе (РЖМат, 1957, 201). Строятся по существу все конечные неополя. Лекцию завершает обобщение теоремы Йордана о четырежды транзитивных группах.

Лекция V, «Вопросы теории матриц и теории чисел», включает теорию конечных проективных плоскостей в теорию блоков. Блок D состоит, по определению, из конечного множества D, содержащего v различных элементов, и b таких его подмножеств $S_1, \ldots, S_b$, содержащих по k элементов каждое, что каждый элемент из D принадлежит r подмножествам S_i, а каждые два различных элемента из D принадлежат λ подмножествам S_i. Необходимо, чтобы $bk = vr$ и $r(k-1) = \lambda(v-1)$. Блок D называется симметричным, если $b = v$ и $r = k$. В этом случае каждые два различных подмножества S_i имеют λ общих элементов. Симметрический блок с $\lambda = 1$ является конечной проективной плоскостью. Каждый блок характеризуется матрицей инцидентности размерности $b \times v$ с элементами 0 и 1. Матричными методами (в частности, с помощью теории рациональных квадратичных форм) получаются некоторые теоремы о несуществовании блоков. Наибольшее впечатление оставляет самая ранняя теорема такого типа: если $n \equiv 1$ или $2 \pmod 4$, то необходимым условием для существования конечной проективной плоскости с $n+1$ точкой на каждой прямой является возможность представить n в виде суммы двух целых квадратов. Ограничением другого характера является допущение, что симметрический блок D допускает коллинеации, которые транзитивны и регулярны относительно элементов из D. Эти соображения применяются к теории разностных систем (РЖМат, 1956, 4070), где даются очень сильные теоремы несуществования. Лекция заканчивается методом, позволяющим установить несуществование некоторых возможных блоков; в симметрическом случае этот метод непригоден. R. H. Bruck

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 73.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

7718. Применение мнимых величин Галуа в теории релейноконтактных схем. IV. Трехзначная теория поляризованных реле. Мойсил (Întrebuințarea imaginarelor lui Galois în teoria mecanismelor automate. IV. O teorie trivalentă a releelor polarizate. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 4, 505—508 (рум.; рез. русск., франц.)

См. РЖМат, 1956, 790, 791; 1957, 3832.

Если схема из контактов K_i с тремя позициями K_i^α ($\alpha = 1, 2, 3$) имеет структурную формулу

$$\sum \lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} K_1^{\alpha_1} \ldots K_n^{\alpha_n},$$

то ее двузначная рабочая функция есть

$$f(c_1, \ldots, c_n) = \sum \lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} L_{\alpha_1}(c_1) \ldots L_{\alpha_n}(c_n),$$

где L_i — интерполяционные полиномы Лагранжа в поле вычетов по модулю 3:

$L_0(z) = 2z^2 + 1$, $L_1(z) = 2z^2 + 2z$, $L_2(z) = 2z^2 + z$.

Для поляризованного реле характеристические уравнения имеют вид

$$x_{N+1} = \xi_N,$$

где ξ — трехзначная переменная, соответствующая току, а x — трехзначная переменная, соответствующая контактам. Рекуррентные уравнения схемы

$$z_{N+1} = F(a, \ldots, c, z_n)$$

записаны в $\mathfrak{G}\mathfrak{F}(3^n)$ По резюме автора

7719. Использование мнимых величин Галуа в теории автоматических механизмов. V. Классификация эволюций схем с одним реле. Мойсил (Intrebuinţarea imaginarelor lui Galois în teoria mecanismelor automate. V. Clasificarea evoluţiilor schemelor cu un releu. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 4, 509—513 (рум.; рез. русск., франц.)

Под эволюцией схемы понимается последовательность состояний, через которые проходят элементы схемы при изменении состояния какого-либо из приемных элементов. Метод классификации схем излагается на примере схем с одним реле.

Случай обыкновенного реле. В поле GF (2) рекуррентное уравнение имеет вид

$$x_{N+1} = ax_N + b, \qquad (1)$$

а возможные изменения положения контактов реле характеризуются преобразованием

$$x = x^* + \lambda. \qquad (2)$$

Задача классификации схем сводится к классификации многочленов (1) относительно преобразования (2). Существует 3 типа схем с одним реле: 1) схемы с фиксированной эволюцией ($x_{N+1} = 1$); 2) стационарные схемы ($x_{N+1} = x_N$); 3) пульсирующие схемы ($x_{N+1} = x_N + 1$).

Случай поляризованного реле. В поле GF (3) рекуррентное уравнение имеет вид

$$x_{N+1} + ax_N^2 + bx_N + c. \qquad (3)$$

а возможные изменения положения контакта характеризуются уравнением

$$x = ax^* + \beta. \qquad (4)$$

Задача классификации таких схем сводится к классификации многочленов (3) относительно преобразования (4). Существует 7 типов схем с одним поляризованным реле, из них три совпадают с типами схем для обычных реле. Остальные 4 типа характеризуются следующими уравнениями:

$$x_{N+1} = 2x_N,\ x_{N+1} = x_N^2,\ x_{N+1} = x_N^2 + 1,\ x_{N+1} = x_N^2 + 2.$$

В. М. Остиану

7720. К изучению симметрических булевых функций с точки зрения теории релейно-контактных схем. Поваров Г. Н., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 2, 183—185

Симметрическая булева функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с рабочими числами $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_l$ обозначается символом

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказывается, что булева функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-m} S_i(x_1, \ldots, x_{n-m})\, S_{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{l_i}}}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n),$$

где $0 \leqslant m \leqslant n$, является симметрической тогда и только тогда, когда точки (i, α_{ij}) либо сплошь заполняют, либо сплошь не заполняют каждую идущую слева вниз направо диагональ точечной решетки из $m+1$ горизонтальных и $n-m+1$ вертикальных рядов.

Эта точечная решетка названа картой разложения симметрической функции, а точки (i, α_{ij}) — рабочими точками карты. Метод карт разложения оказывается полезным при анализе и синтезе симметрических контактных схем и позволяет проще и нагляднее исследовать систематику симметрических булевых функций.

Указывается, что функция, однотипная с симметрической, получается из последней заменой некоторых аргументов их отрицаниями. Условно она записывается так:

$$S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

Доказывается, что при $n = m$ справедливо равенство

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_e}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = S_{n-\alpha_l,\, n-\alpha_{l-1}, \ldots,\, n-\alpha_1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Отсюда, как следствие, $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда рабочие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ расположены симметрически относительно числа $n/2$,

При $0 < m < n$ функция $S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m-1}, \ldots, x_n)$ является симметрической тогда и только тогда, когда

$$S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n,$$

где $\bar{x}_1$ есть x_1 или $\bar{x}_1$.

На основе полученных результатов доказывается, что число ν_n типов симметрических функций n переменных равно $2^n + 2^{[(n+1)/2]} + 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - n - 1$, а число $\varkappa_n$ функций n переменных одного типа с симметрическими для $n > 1$ равно $2^{2n} - 2^{n+1} + 4$.

Симметрические функции с несимметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$ названы моносимметрическими, функции $0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ — полисимметрическими, а все остальные симметрические функции n переменных — бисимметрическими. Число бисимметрических функ-

дий равно $2^{[n/2]+1}-4+2\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-n\right)$. Мощность типа моносимметрической функции равна 2^n, бисимметрической функции 2^{n-1} и полисимметрической — 1 или 2.

Доказываются теоремы: а) Единственными симметрическими функциями r переменных, функционально разделимыми и в то же время особенными, являются

$$x_1x_2\ldots x_n,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n,\ x_1+x_2+\ldots+x_n \text{ и}$$
$$\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_r.$$

б) Из симметрических собственных функций реализуются с независимыми контактами только функции, перечисленные в предыдущей теореме. Обе эти теоремы распространимы на функции, однотипные с симметрическими. В. М. Остиану

7721. Соотношение методов Лунца и Цетлина в мостиковых схемах. Мойсил (Relaţiile între metoda lui Lunţ şi metoda lui Ţetlin pentru schemele în punte. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 6, 743—744 (рум.; рез. русск., франц.)

Указывается соотношение между матрицами Лунца и Цетлина при описании контактных многополюсников. По резюме автора

7722. Двухполюсные релейные схемы. Клейн, Вильямс, Морган (Two-terminal relay circuits. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1957, 30, № 1, 71—73 (англ.)

Излагается метод, позволяющий упрощать контактные схемы и исключать «лишние» элементы. Лишними названы элементы, состояние которых не влияет на общую проводимость схемы. Метод основан на представлении условий работы схемы (авторы для алгебраической записи контактной схемы применяют «+» для обозначения последовательного соединения контактов, а «.» для обозначения параллельного соединения контактов) в виде таблицы двоичных чисел, например в виде

C	B	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(1)

Тогда лишними будут те элементы, для которых в таблице имеются все возможные сочетания 0 и 1 при одинаковых состояниях остальных элементов. Так, в (1) элементы C и B лишние.

Примечание референта. Авторы фактически приводят совершенную нормальную форму к сокращенной, используя понятие о соседних конституентах. См. также РЖМат, 1955, 2421; 1956, 4125, 5144К. В. Г. Лазарев

7723. Об уменьшении числа контактов введением мостиковых цепей. Константинеску (Asupra reducerii numărului de contacte prin introducerea circuitelor in punte. Constantinescu Paul), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1956, № 11, 45—69 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается матричный синтез мостиковых контактных схем. Доказываются 3 теоремы, позволяющие образовать для любого данного параллельно-последовательного двухполюсника (или его структурной функции) последовательность матриц непосредственных проводимостей, которые функционально равносильны исходному двухполюснику, но содержат мостиковые цепи. Используется работа А. Г. Лунца (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, № 5, 405—426). Метод иллюстрируется 4 примерами. Г. Н. Поваров

7724. Алгебраическая теория работы многотактных релейно-контактных схем с двумя промежуточными элементами. Мойсил (Teoria algebrică a funcţionării in mai mulţi timpi a schemelor cu contacte de relee cu două elemente intermediare. Moisil Gr. C.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. R.P.R. Fil. Cluj. Ser. 1, 1954, 5, № 3—4, 7—14 (рум.; рез. русск., франц.)

Указывается, что анализ и синтез многотактной релейно-контактной схемы можно осуществить не только с помощью булевой алгебры, но и с помощью теории конечных полей.

Если схема содержит p промежуточных элементов, то 2^p их различных состояний можно рассматривать как элементы поля Галуа $GF(2^r)$. Система рекуррентных уравнений заменяется одним уравнением $z_{N+1}=P(z_N)$, где P — многочлен над $GF(2^p)$.

Если схема содержит два промежуточных элемента x и y, то рекуррентные уравнения для них записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} x_{N+1} &= a'x_Ny_N+b'x_N+c'y_N+d' \\ y_{N+1} &= a''x_Ny_N+b''x_N+c''y_N+d'' \end{aligned}\right\}; \qquad (1)$$

где a', b', . ., d'' — функции приемных элементов схемы и могут рассматриваться как элементы поля Галуа $GF(2)$. Элементы x и y из $GF(2)$ однозначно определяют z из $GF(2^2)$ и обратно. Положив $z_N=x_N+\varepsilon y_N$, можно свести уравнения (1) к одному уравнению

$$z_{N+1}=az_N^3+bz_N^2+cz_N \text{ в } GF(2^2),$$

где

$$a=a'+za'',$$
$$b=(a'+\varepsilon a'')(\varepsilon+1)+(b'+\varepsilon b'')\varepsilon+(c'+\varepsilon c''),$$
$$c=(a'+\varepsilon a'')\varepsilon+(b'+\varepsilon b'')(\varepsilon+1)+(c'+\varepsilon c''),$$
$$d=d'+\varepsilon d''.$$

Вводится понятие изоморфных схем как схем, обладающих одинаковой эволюцией. Под эволюцией понимается последовательность состояний схемы, принимаемых ею под внешним воздействием.

Проводится синтез всевозможных 4-тактных схем с двумя промежуточными элементами. Такая схема может находиться в 4 состояниях: z_0, z_1, z_{II} и z_{III}. С точностью до изоморфизма $z_0=0$, $z_I=1$, $z_{II}=\varepsilon+1$, $z_{III}=\varepsilon$. Схемы этого класса различаются состоянием в IV такте $z_{IV}=\alpha$. Для нахождения рекуррентного уравнения определяют многочлен 3-й степени $P(z)$ по условиям:

$$P(0)=1,\ P(1)=\varepsilon+1,\ P(\varepsilon+1)=\varepsilon,\ P(\varepsilon)=\alpha.$$

Используя интерполяционную формулу Ньютона над $GF(2^2)$:

$$P(z)=P(0)+z[P(0)+P(1)]+z(z+1)[\varepsilon P(0)+$$
$$+(\varepsilon+1)P(1)+P(\varepsilon+1)]+z(z+1)(z+\varepsilon+1)\times$$
$$\times[P(0)+P(1)+P(\varepsilon+1)+P(\varepsilon)],$$

получают $P(z)=1+\varepsilon z^2+\alpha z(z+1)(z+\varepsilon+1)$.

Существуют 4 типа 4-тактных схем:

1) Схемы с повторяющимся действием в 4 такта. Для них $\alpha = 0$ и $P(z) = 1 + \varepsilon z^2$. Их эволюция следующая: 0, 1, $\varepsilon + 1$, ε, 0, ...

2) Схемы с последовательно повторяющимся действием в 3 такта (1-й такт подготовительный). Для них $\alpha = 1$ и $P(z) = 1 + (\varepsilon + 1)(z + z^2) + z^3$.
Их эволюция следующая: 0, 1, $\varepsilon + 1$, ε, 1, $\varepsilon + 1$, ε, 1, ...

3) Схемы с последовательно повторяющимся действием в 2 такта (два других такта являются подготовительными), для них $\alpha = \varepsilon + 1$ и $P(z) = 1 + \varepsilon z + (\varepsilon + 1)(z^2 + z^3)$.
Их эволюция следующая: 0, 1, $\varepsilon + 1$, ε, $\varepsilon + 1$, ε, ...

4) Схемы с последовательным действием в 4 такта. Для них $\alpha = \varepsilon$ и $P(z) = 1 + z + z^2 + \varepsilon z^3$. Их эволюция следующая:

0, 1, $\varepsilon + 1$, ε, ε, ε, ...

Аналогично проводится синтез и классификация всевозможных 3-тактных и 2-тактных схем с 2 промежуточными элементами. В. М. Остиану

7725. О возможностях синтеза схем из произвольных элементов. Лупанов О. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 146

7726. Применение некоторых топологических инвариантов для синтеза двухполюсных контактных схем. Трахтенброт Б. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 136

7727. Векторно-алгебраический метод анализа и синтеза многотактных релейных систем. Шестаков В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 190—191

См. также: 7599, 7607, 7609, 7610, 7611, 7623, 8101, 8162, 8164, 8167, 8169—8177, 8179, 8180, 8203, 8204, 8229—8232, 8264—8266, 8271, 8273, 8274

ТОПОЛОГИЯ

7728. О числе неподобных реберных подграфов данного графа. Харари (On the number of dissimilar linesubgraphs of a given graph. Harary Frank), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 57—64 (англ.)

Теорема Пойа (Pólya G., Acta math., 1937, 68, 145—254) дает выражение для подсчитывающего конфигурации ряда $F(x)$ через подсчитывающий фигуры ряд $\varphi(x)$ и так называемый циклический индекс Z группы Γ некоторых подстановок: $F(x) = Z(\Gamma, \varphi(x))$. В реферируемой статье этот результат непосредственно применяется для двух случаев — для конфигураций, являющихся реберными подграфами данного графа G, и для конфигураций, являющихся G-корневыми графами.

Рассматривается граф G с p вершинами и q ребрами. Реберным подграфом называется подграф, имеющий те же вершины, что и G. Два реберных подграфа графа G называются подобными, если существует автоморфизм графа G, переводящий один подграф в другой. Группа Γ здесь есть группа $\Gamma_1(G)$ подстановок степени q множества ребер графа G, индуцируемая автоморфизмами графа G.

Теорема. Подсчитывающий полином для числа неподобных реберных подграфов графа G получается подстановкой $1 + x$ в циклический индекс группы $\Gamma_1(G)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{q} g_k x^k = Z(\Gamma_1(G), 1 + x).$$

Далее определяются G-корневые графы; для них находится соответствующая группа; дается аналогичное выражение подсчитывающего полинома для G-корневых графов. Указывается, что эти результаты являются обобщением соответствующих результатов ранее опубликованной статьи (РЖМат, 1957, 6210).

Приводятся примеры для графов с четырьмя вершинами. И. Н. Врублевская

7729. Теоремы о графах и о правильных отображениях. Оре (Graphs and matching theorems. Ore O.), Duke Math. J., 1955, 22, № 4, 625—639 (англ.)

Пусть $V = \{a_i\}$, а $V' = \{a'_j\}$, где индексы принадлежат множествам M и M' соответственно. Граф, вершинами которого являются точки a_i и a'_j, а ребрами — отрезки, соединяющие некоторые из точек a_i с некоторыми из точек a'_j, назовем двучастным графом, если он удовлетворяет следующим двум условиям: 1) к каждой вершине примыкает хотя бы одно ребро; 2) к каждой вершине примыкает лишь конечное число ребер.

Через $V'(A)$ обозначим множество тех точек из V', которые соединены с точками $a_i \in A \subset V$; множество $V'(A')$ определяется симметрично. Через $\nu(A)$ обозначим число точек в множестве A, если оно конечно. Число $\delta(A) = \nu(A) - \nu(V'(A))$ назовем недостаточностью (deficience) множества A. Заметим, что $\delta(\emptyset) = 0$, где $\emptyset$ — пустое множество. Далее предполагается, что число δ ограничено сверху. Верхнюю его границу, которая, очевидно, достигается, назовем максимальной недостаточностью множества V и обозначим через δ_0.

Говорят, что множество $A \subset V$ правильно отображается (matched) в множество V', если установлено взаимно однозначное соответствие между точками этих множеств, причем соответствующие точки соединены ребрами.

Теорема 7. Пусть множество V обладает максимальной недостаточностью δ_0. Тогда найдется такое его подмножество D, содержащее δ_0 элементов, что $V \setminus D$ правильно отображаемо в некоторое подмножество A' множества V'. Число δ_0 есть наименьшее число, обладающее этим свойством. Необходимым и достаточным условием возможности правильно отобразить множество V в V', является равенство $\delta_0 = 0$.

Теорема 14. Пусть V и V' — конечные множества, причем их максимальные недостаточности равны соответственно δ_0 и δ'_0. Тогда наибольшее число μ вершин, могущих быть правильно отображенными друг в друга, выражается формулой

$$\mu = \nu(V) - \delta_0 = \nu(V') - \delta'_0.$$

Эти и некоторые другие результаты даются также в матричной форме. Дается обширная библиография. С. С. Рышков

7730. Топологическая и динамическая инвариантная теория электрической сети. Дойл (Topological and dynamical invariant theory of an electrical network. Doyle Thomas C.), J. Math. and Phys., 1955, 34, № 2, 81—94 (англ.)

Развивая топологическую теорию электрических сетей, которая сводится по существу к гомологиям

графов с действительными коэффициентами, автор приводит инвариантную формулировку законов Кирхгоффа при помощи матрицы инцидентности. Путем приведения матрицы инцидентности к каноническому виду (обычным для комбинаторной топологии способом) доказывается теорема для графов (одномерных комплексов), являющаяся по существу частным случаем теоремы существования канонической базы для комплексов (см., например, Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947, гл. IX). Применяя эту теорему к законам Кирхгоффа, автор получает теорему, выражающую эти законы в терминах канонической базы. Для этого приходится рассматривать токи, протекающие не только по простым звеньям сети, но и по элементам канонической базы — комбинациям этих звеньев с целыми или с действительными коэффициентами. И. Берштейн

7731. Окружение клеток в трехмерном пространстве простыми замкнутыми поверхностями. Гриффит (The enclosing of cells in three space by simple closed surfaces. Griffith H. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **81**, № 1, 25—48 (англ.)

Даются весьма громоздкие необходимые и достаточные условия для того, чтобы i-мерная клетка ($i=1, 2, 3$; клеткой автор называет множество, гомеоморфное замкнутому шару) в трехмерном евклидовом пространстве имела как угодно тесные окрестности, ограниченные двумерными полиэдральными сферами. Для одномерных клеток эти условия известны (РЖМат, 1957, 6918). А. С. Шварц

7732. О m-топологических и m-компактных пространствах. Чжан Гунь-ань (關於高級 m-拓朴和 m-緊致空間. 張功安), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 263—265 (кит.)

Обобщается понятие m-топологического пространства, введенное Гань Дань-янем (Цзыжань кэсюэ сюэбао, 1955, № 1, 92—111), и соответствующие теоремы на случай, когда m является трансфинитным кардинальным числом. Ши Чжун-ця

7733. О расширении топологических пространств. Смирнов Ю. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1. М., АН СССР, 1956, 136

7734. О сходстве точечных множеств Хасимото (On the resemblance of point sets. Hashimoto Hiroshi), Math. Japan. 1954, **3**, 53—56 (англ.)

Для любого подмножества X некоторого топологического пространства через $D(X)$ обозначается множество точек, в которых X не имеет первой категории. Множество $X+D(X)$ называется D-замыканием множества X. Формулируются простые следствия этого определения (доказательства очевидны); например, X есть бэровское множество в том и только в том случае, если оно является разностью двух D-замкнутых множеств (этот факт расценивается как «сходство» между бэровскими множествами и множествами, которые являются разностью двух замкнутых множеств). M. Katětov

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 172.

7735. О пространствах, на которых каждое непрерывное действительное отображение ограничено. Марджишич, Папич (Sur les espaces dont toute transformation réelle continue est bornée. Mardešić Siba, Papić Pavle), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 4, 225—232 (франц.)

Введены два новых понятия: Топологическое T_1-пространство называется слабо компактным, если каждая бесконечная система попарно непересекающихся непустых открытых множеств имеет точку накопления, и слабо нормальным, если любые замкнутые множества A и B, из которых одно не более чем счетно и содержит только изолированные точки, отделимы открытыми множествами. Изучается связь этих понятий между собою и с пространствами, на которых всякая непрерывная действительная функция ограничена, введенными ранее Хьюитом (Hewitt E., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 45—99) под названием псевдокомпактных. В частности, доказываются теоремы: В классе вполне регулярных пространств псевдокомпактность эквивалентна слабой компактности; в классе слабо нормальных пространств слабая компактность эквивалентна компактности; в классе вполне регулярных пространств компактность эквивалентна совокупности двух свойств — слабой нормальности и псевдокомпактности; в классе хаусдорфовых пространств бикомпактность эквивалентна совокупности двух свойств — паракомпактности и псевдокомпактности.

Приведены примеры пространств: вполне регулярных, но не слабо нормальных, слабо нормальных, но не нормальных и, наконец, слабо нормальных, но не вполне регулярных. И. В. Проскуряков

7736. К вопросу о существовании универсальных накрывающих. Банашевский (Zur Existenz von universellen Überlagerungen. Banaschewski Bernhard), Math. Nachr., 1956, **15**, № 3, 175—180 (нем.)

Известно доказательство существования универсального накрывающего пространства для связного, локально связного пространства, допускающего покрытие односвязными областями (Шевалле, Теория групп Ли, I, Гос. изд-во ин. лит., М., 1948, гл. II). В реферируемой работе доказывается несколько более общее утверждение способом, примыкающим к конструкции универсальной накрывающей для многообразия с помощью непрерывных путей, и геометрически более наглядным. Пусть E — связное, локально связное топологическое пространство и $\mathfrak{V}$ — его покрытие связными открытыми множествами. Пусть (X, χ) — некоторое накрывающее пространство для E. Покрытие $\mathfrak{V}$ называется ровно накрытым с помощью χ, если каждое множество $V \in \mathfrak{V}$ ровно накрыто с помощью χ (т. е. каждая компонента множества $\chi^{-1}(V)$ отображается с помощью χ топологически на V). Если (X, χ) и (Y, φ) — два накрывающих пространства, то (X, χ) считается больше, чем (Y, φ), если существует отображение $\psi: X \to Y$, причем (X, ψ) накрывает пространство Y и $\chi = \varphi \circ \psi$. В работе доказывается следующее основное предложение: Для любого покрытия $\mathfrak{V}$ связного, локально связного пространства E имеется наибольшее накрывающее пространство, ровно накрывающее $\mathfrak{V}$.

Далее устанавливается, что E имеет односвязное накрывающее пространство тогда и только тогда, когда оно допускает покрытие областями, ровно накрытыми любым накрывающим пространством для E (это условие выполнено, в частности, если области односвязны). И. З. Розенкноп

7737. Равномерные преобразования пространств. Нагами (一様位相空間の合同變換なす群の位相化について. 永見啓應), 數學, Sugaku, 1953, **5**, № 1, 34—37 (япон.)

7738. Геометрия равномерных комплексов и δ-размерность точечных множеств. Смирнов Ю. М., Матем. сб., 1956, **40**, № 2, 137—156

Понятие δ-размерности точечного множества (т. е. размерности множества, рассматриваемого как пространство близости) введено автором ранее (РЖМат, 1957, 3874). В данной работе дается полная характеристика тех множеств, лежащих в n-мерном евклидовом пространстве R^n, для которых δ-размерность равна n: это те и только те множества, для которых существует такое $r > 0$, что для всякого $\varepsilon > 0$ в R^n

имеется шар радиуса r, в котором точки данного множества образуют ε-сеть. Например, если взять последовательность шаров Q_i, $i=1, 2, 3 \ldots$ радиуса 1 с центрами, удаляющимися в бесконечность, и в каждом шаре Q_i взять конечное множество A_i, образующее в Q_i ε_i-сеть при $\varepsilon_i \to 0$, то множество $A=\bigcup_i A_i$ будет счетным замкнутым множеством, имеющим δ-размерность n.

Для доказательства своего основного результата автор развивает теорию бесконечных комплексов, называемых им равномерными. Автор прежде всего называет лебеговым такой симплициальный комплекс в R^n, для которого расстояния между любыми двумя непересекающимися замкнутыми его симплексами ограничены снизу некоторым положительным числом. (В формулировке этого свойства в работе пропущено требование, чтобы симплексы не пересекались). Лебегов комплекс, диаметры симплексов которого ограничены сверху, называется равномерным. О лебеговых, и в частности, о равномерных комплексах автор доказывает ряд теорем, из которых основное значение для его целей имеет, например, следующая:

Пусть K — равномерный комплекс. Тогда ко всякому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\eta > 0$, что для любой системы S замкнутых симплексов комплекса K пересечение η-окрестностей симплексов $T \in S$ содержится в ε-окрестности пересечения этих симплексов.

П. С. Александров

7739. Топология B-метрических пространств. Эллис, Спринкл (Topology of B-metric spaces. Ellis D., Sprinkl H. D.), Compositio math., 1956, 12, № 3, 250—262 (англ.)

σ — полная булева алгебра B называется (t)- или (tt)-алгеброй, если в B для всякой последовательности с двойным входом $\{x_j^i\}$, для которой $\lim_j x_j^i = x_i$ для любого i и $\lim_i x_i = x$ выполнено соответственно условие (t) или (tt): (t) существует такая функция $j(i)$, что $\lim_i x_{j(i)}^i = x$, (tt) существует такая функция $j(i)$, что если $k(i) \geqslant j(i)$ для всех i, то $\lim_i x_{k(i)}^i = x$.

Эллисом было опубликовано (Ellis D., Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, 662) ошибочное решение проблемы 77 Г. Биркгофа. В реферируемой работе дается решение этой проблемы: $2^{\aleph_0}$ является (tt)-алгеброй, вообще же булева σ-алгебра может не быть (t)-алгеброй.

B-метрическим пространством называется всякое множество Σ, взятое вместе с отображением $d(\xi, \eta)$: $\Sigma \times \Sigma \to B$, удовлетворяющим обычным аксиомам метрического пространства, трактуемым в B. Для последовательности $\{\xi_i\}$ элементов Σ полагаем $d\text{-}\lim_i \xi_i = \xi$ тогда и только тогда, когда $\lim_i d(\xi_i, \xi) = 0$ в B. Порождаемая в Σ этим пределом топология называется d-топологией. Топологическое пространство называется метризуемым над B, если оно может быть обращено в B-метрическое пространство так, чтобы равенства $\lim_i \xi_i = \xi$ в старой топологии и $d\text{-}\lim_i \xi_i = \xi$ в новой были равносильны. Всякая булева σ-алгебра, рассматриваемая с ее K-топологией, автометризуема над собой посредством симметрической разности $d(x, y) = x \oplus y$.

Последовательность $\{\xi_i\}$ точек B-метрического пространства Σ называется последовательностью Коши, если $\lim_i \lim_j d(\xi_i, \xi_j) = 0$; пространство Σ называется полным, если всякая его последовательность Коши сходится в нем. Само B полно в своей автометризации. Две последовательности Коши $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$ называются эквивалентными тогда и только тогда, когда $\lim_i d(\xi_i, \eta_i) = 0$. Если B является (tt)-алгеброй, то всякое B-метрическое пространство конгруэнтно с всюду плотным множеством некоторого полного B-метрического пространства.

Среди T_1-пространств нульмерными являются те и только те, которые метризуемы над алгебрами множеств.

Комбинаторное произведение $\Sigma = \Pi_n \Sigma_n$ последовательности $\{\Sigma_n\}$ B-метрических пространств является B-метрическим пространством, причем $d(\xi, \eta)$ в Σ можно выбрать так, чтобы Σ являлось слабым топологическим произведением этих пространств. Библ. 26 назв.

Г. Я. Арешкин

7740. О метризуемости локально-компактных пространств, разлагаемых в сумму счетного числа множеств со счетной базой. Смирнов Ю. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 136—137

7741. Об одной теореме, касающейся эквивалентности точечных множеств по отношению к конечным разбиениям. Серпинский (Sur un théorème concernant l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie. Sierpiński W., Matematiche, Catania, 1953, 8, № 1, 10—13) (франц.)

Если A и B — изометричные подмножества некоторого метрического пространства и если n — такое натуральное число, что пересечение $A \cap B$ содержит менее чем $n(n+1)/2$ точек, то каждое из множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ может быть разбито на n частей таким образом, что i-я часть множества $A \setminus B$ изометрична i-й части множества $B \setminus A$, $i=1, \ldots, n$. Оценка $n(n+1)/2$ — наилучшая возможная. Доказательство проводится индукцией по n. Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 228.

P. R. Halmos.

7742. Проводимость открытых отображений. Вильямс (Reduction of open mappings. Williams R. F). Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 312—318 (англ.)

Изучается вопрос: в каких случаях открытое отображение компактных метрических пространств будет приводимым?

Основная гипотеза: X и Y — компактные метрические пространства, f — открытое отображение пространства X на Y. Пространство имеет счетную базу, занумерованную в такую последовательность $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, что диаметр множества N_i стремится к нулю при $i \to \infty$.

Теорема 1. Пусть X и Y удовлетворяют основной гипотезе и R — такое множество в Y, что полный прообраз каждой точки $y \in R$ является разложимым континуумом. Тогда существует такое замкнутое множество $X' \subset X$, $X' \neq X$, что $f|X'$ монотонно, $X' \supset X/f^{-1}(a)$ и $f(X') = Y$.

Из этой теории легко получается теорема Дайера (РЖМат, 1955, 1123). Если X и Y удовлетворяют основной гипотезе, Y — континуум, и $f^{-1}(y)$ — разложимые континуумы для каждого $y \in Y$, то отображение f приводимо.

Теорема 3. Пусть X и Y удовлетворяют основной гипотезе, Y — совершенное множество и прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ является связным, локально связным множеством; тогда существует такое замкнутое множество X' в X, что $f|X'$ монотонно, $f(X') = Y$ и для любого замкнутого множества X'' из $X'' \neq X$ следует $f|X'' \neq Y$.

А. Д. Тайманов

7743. О механизме равномерных аппроксимаций в области непрерывных отображений компактов. Полак А. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 149—154

Исследуются равномерно сходящиеся последовательности непрерывных отображений компакта X на компакт Y.

Теорема 1. Если последовательность непрерывных отображений f_n компакта X на Y сходится равно-

мерно к открытому отображению f, то для каждого ε найдется такое $N(\varepsilon)$, что уклонение полного прообраза $f_n^{-1}(y)$ точки $y \in Y$, где $n > N$ от полного прообраза $f^{-1}(y)$ той же точки будет меньше данного ε для всех точек y компакта Y (уклонением множества B от множества A автор называет число $\sup_{x \in B} r(x, A)$, где $r(x, A)$ — расстояние точки от x до множества A).

Теорема 2. Пусть $F(x)$ — открытое отображение компакта X на Y. Тогда, каково бы ни было ε, найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что каждое непрерывное отображение f компакта X на Y, удовлетворяющее условию $\rho(F, f) < \delta$, где ρ — расстояние в пространстве непрерывных отображений компакта X на Y, может быть представлено в виде: $f(x) = F(\varphi_\varepsilon(x))$, где $\varphi_\varepsilon(x)$ — некоторый ε-сдвиг пространства X (в себя).

Теорема 3. Для того чтобы равномерная сходимость последовательности f_n открытых отображений компакта X на Y к открытому отображению f того же компакта X на Y влекла бы равномерную сходимость полных прообразов $f_n^{-1}(y)$ к полным прообразам $f^{-1}(y)$, необходимо и достаточно, чтобы все отображения f_n были равностепенно открыты (т. е. для любой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(x, \varepsilon) > 0$, что образ ε-окрестности точки x при каждом отображении f_n покрывает δ-окрестность точки $f(x)$).

Теорема 4. Пусть $H(p)$ — непрерывное открытое гомоморфное отображение компактной топологической группы P на компактную топологическую группу Q и пусть $H_n(p)$ — последовательность непрерывных гомоморфизмов группы P в Q, равномерно сходящихся на P к $H(p)$ и удовлетворяющих следующим условиям: 1) $H_n(0) = 0$; 2) для любого ε найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что образ каждой ε-окрестности нуля при всех отображениях $H_n(p)$ покрывает $\delta(\varepsilon)$-окрестность нуля в Q. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число $N = N(\varepsilon)$ и величина $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что для каждого решения p уравнения $H(p) = q$ отыщется решение p_0 уравнения $H_n(p) = q'$, где $n > N$, а q' принадлежит σ-окрестности точки q, отстоящее от решения p на расстояние, меньшее ε. С другой стороны, для каждого решения p_0 уравнения $H_n^*(p) = q'$, $n > N$, найдется решение p уравнения $H(p) = q$, отстоящее от p меньше, чем на ε.

Теорема 5. Пусть f — непрерывное и открытое отображение компакта X на Y, а $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных равностепенно открытых отображений компакта X в Y, равномерно сходящаяся к f на X. Тогда, какое бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta(\varepsilon)$ и число $N(\varepsilon)$, что для всех $y \in Y$ отклонение (по Хаусдорфу) полного прообраза $f_n^{-1}(z)$, где z — точка из δ-окрестности точки y, от полного прообраза точки y при отображении f остается меньше ε для всех $n > N$. А. С. Пархоменко

7744. Предварительное обсуждение некоторых вопросов, касающихся отбора в связи с вопросом о неявных функциях. Маккаро (Quelques questions préalables à propos du problème des sélections, en rapport avec celui des fonctions implicites. Massaro Giliana Pannoli), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 2, 153—155 (франц.)

Пусть H — замкнутое множество в топологическом пространстве S, $E(x)$ — многозначная функция, определенная на H, значения которой суть замкнутые множества в топологическом пространстве T. Если S — евклидово n-мерное пространство и T — прямая, то через C обозначается следующее множество $(n+1)$-мерного евклидова пространства:

$$C = \bigcup_{x \in H} \bigcup_{y \in E(x)} (x, y).$$

Пусть x_0 — некоторая точка множества H и $y_0 \in E(x_0)$. Отбором с начальной точкой $P_0 = (x_0, y_0)$ автор называет множество точек (x, y) евклидова $(n+1)$-мерного пространства, определяемое однозначной функцией $y = f(x)$, удовлетворяющей условию $y_0 = f(x_0)$, определенной и непрерывной на множестве A, лежащем в достаточно малой окрестности точки x_0 и такой, что $f(x) \in E(x)$ в каждой из этих точек. Если такой отбор существует (не существует), то точка P_0 называется достижимой (недостижимой) в C.

Теорема. Если S и T — действительные прямые, H — замкнутый интервал (a, b), то множество недостижимых точек (если оно не пусто) плотно в себе.

А. С. Пархоменко

7745. О метрической размерности в смысле П. С. Александрова. Смирнов Ю. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 5, 679—684

Упомянутая в заглавии «размерность» есть метрический инвариант δmA, определенный для любого точечного множества $A \subset R^n$, как наименьшее целое $r > 0$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ можно множество A посредством ε-сдвига перевести в локально конечный r-мерный полиэдр. Тот же инвариант, но уже для любого метрического пространства A можно определить и как наименьшее такое целое $r \geqslant 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ пространство A допускает открытое покрытие кратности $\leqslant r+1$. При этом можно ограничиться (не влияя на результат) рассмотрением одних лишь локально конечных покрытий. Из теоремы об ε-сдвигах (для компактов) следует, что метрическая размерность всякого компакта совпадает с его обычной размерностью. В то же время существует построенный К. А. Ситниковым пример двумерного множества, лежащего в R^3, метрическая размерность которого равна 1. Если замыкание множества $A \subset R^n$ имеет ту же размерность, что и множество A, то $\delta mA = \dim A$ (теорема Ситникова). Отсюда и из теоремы о возможности топологического включения каждого метрического пространства со счетной базой в компакт той же размерности следует, что метрическая размерность топологическим инвариантом не является. Однако легко построить множества, не содержащие никакого компакта той же размерности и тем не менее такие, что все их гомеоморфные множества имеют ту же метрическую размерность. В данной работе для метрической размерности доказывается аналог теоремы Тумаркина о существовании для любого $A \subset R^n$ такого G_δ-множества B, $A \subseteq B \subseteq R^n$, для которого $\delta mB = \delta mA$. Доказывается далее формула, аналогичная формуле Урысона:

$$\delta m(A \cup B) \leqslant \delta mA + \delta mB + 1.$$

П. С. Александров

7746. О борелевых множествах, являющихся полями комплексных чисел. Капуано (Sur les ensembles boréliens représentant des corps de nombres complexes. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 23, 2193—2196 (франц.)

С помощью наследственно неразложимых континуумов автор доказывает существование полей комплексных чисел K_4, K_5, являющихся борелевскими множествами соответственно типов $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$. При этом K_4 есть наименьшее поле над $E \setminus X$; X — множество типа F_σ, $X \subset E$, X первой категории на E и на всяком континууме $\subseteq R^2$; множество E всюду плотно на некотором наследственно неразложимом континууме.

Г. Курепа

7747. О гомологической размерности топологических пространств. Бокштейн М. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 133

Упоминаются опубликованные ранее результаты (Докл. АН СССР, 1948, 63, № 3, 221—223). Часть этих результатов недавно опубликована в подробном изложении (РЖМат, 1957, 6226). В. Г. Болтянский

7748. Замечание к теореме Борсука об антиподах. Дейвис (A note on Borsuk's antipodal-point theorem. Davies M. W.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 293—300 (англ.)

Пусть L_1, L_2 — линейно связные хаусдорфовы пространства, на каждом из которых действует без неподвижных точек конечная группа G, L_1' и L_2' — пространства, получающиеся из пространства L_1 и L_2 отождествлением точек, эквивалентных относительно группы G, f — непрерывное отображение пространства L_1 в пространство L_2, коммутирующее с преобразованиями группы G. Предположим, что $H_i(L_1, K) = H_i(L_2, K) = 0$ при $0 < i < n$ (K — абелева группа коэффициентов) и обозначим через $H_n(L_i, K)$ фактор-группу группы $H_n(L_i, K)$ по подгруппе, порожденной элементами вида $g_*u - u$, где g_* — автоморфизм группы $H_n(L_i, K)$, порождаемый преобразованием $g \in G$. Автор показывает, что отображение $f_*: \bar{H}_n(L_1, K) \to \bar{H}_n(L_2, K)$ эпиморфно, если выполнено хотя бы одно из следующих трех условий: а) группы $H_n(L_2', K)$ и $H_n(G, 1, K)$ имеют одинаковый порядок; б) группы $\bar{H}_n(M; K)$ и $H_{n+1}(G, 1, K)$ имеют одинаковый порядок и $H_{n+1}(M', K) = 0$; в) естественное отображение $\bar{H}_n(M, K) \to H_n(M', K)$ переводит всю группу $\bar{H}_n(M, K)$ в 0.

В случае, когда $G = K = Z_m$, $L_2 = S^n$ и преобразования группы G тривиально действуют в группе $H_n(S^n)$, выполняется условие б) и, следовательно, отображение $f_*: H_n(L_1, Z_m) \to H_n(S^n, Z_m)$ является эпиморфизмом (Для $m = 2$ эта теорема была доказана Яворовским (РЖМат, 1956, 7233).

Примечание референта: Автор предполагает, что группа G абелева, но нигде не использует этого предположения. А. С. Шварц

7749. Наименьшее число совпадений. Ширмер (Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. Schirmer Helga), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 253—254 (нем.)

Доклад на математическом конгрессе в Амстердаме. (См. РЖМат, 1957, 6227). В. Г. Болтянский

7750. Исправление и добавление к работе «Теория когомологий полиэдра». Ван-дер-Варден (Berichtigung und Ergänzung zur Arbeit «Die Cohomologietheorie der Polyeder». Van der Waerden B. L.), Math. Ann., 1956, 132, № 2, 130—133 (нем.)

Исправляются неточности и ошибки предыдущей статьи. (РЖМат, 1957, 5415). С. С. Рышков

7751. Теоретико-числовые свойства когомологических групп. Таннака, Куниёси, Тарата, Такахаси (Cohomology 群の整數論的性質. 淡中忠郎, 國吉秀夫, 寺田文行, 高橋秀一), 數學, Сугаку, 1954, 6, № 1, 30—42 (японск.)

7752. О пространстве отображений сферы в себя. Вада (On the space of mappings of a sphere on itself. Wada Hidekazu), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 420—435 (англ.)

Обозначим через G_n^* пространство всех непрерывных отображений n-мерной сферы S^n в себя и через F_n^* — его подмножество, состоящее из отображений, оставляющих на месте северный полюс сферы. Доказывается следующая теорема: Пространства G_n^* и $S^n \times F_n^*$ имеют одинаковый гомотопический тип в том и только в том случае, когда $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ содержит элемент с инвариантом Хопфа, равным 1.

А. С. Шварц

7753. Гомотопические классы отображений сфер и теорема о стандартных путях. Тода (Standard path の理論と球面寫像について。戸田宏), 數學, Сугаку, 1954, 5, № 4, 1—18 (япон.)

7754. Аксиоматический подход к теории гомотопических групп. Ху Сы-цзэнь (Axiomatic approach to the homotopy groups. Hu Sze-Tsen), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, 62, № 5, 490—504 (англ.)

Дается аксиоматическое определение гомотопических групп, идея которого была высказана независимо Серром и Милнором.

Под тройкой (X, A, x_0) автор понимает совокупность топологического пространства X, его непустого подмножества A и точки $x_0 \in A$. Отображением $f: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ тройки (X, A, x_0) в тройку (Y, B, y_0) называется отображение f пространства X в пространство Y, удовлетворяющее условию $f(A) \subseteq B$, $f(x_0) = y_0$. Тройкой, ассоциированной с данной тройкой (X, A, x_0), называется совокупность (U, C, u_0), где U — пространство всех путей в X, начинающихся в x_0, C — подмножество U, состоящее из путей, кончающихся в множестве A, u_0 — отображение отрезка в точку x_0. Ставя в соответствие каждому пути его конец, получаем отображение $p: (U, C, u_0) \to (X, A, x_0)$.

Автор называет гомотопической теорией совокупность функций π^*, ∂, описываемую следующим образом. Функция π ставит в соответствие тройке (X, A, x_0) и целому числу $m \geqslant 0$ абстрактное множество $\pi_m(X, A, x_0)$, причем множество $\pi_0(X, A, x_0)$ должно совпадать с множеством компонент пространства, получающегося из X с помощью отождествления в точку подмножества A. Множество $\pi_m(X, A, x_0)$ должно быть группой при $m \geqslant 2$, а также если $m = 1$, $A = x_0$ и если $m = 1$ и (X, A, x_0) — тройка, ассоциированная с тройкой вида (R, r_0, r_0). Функция* ставит в соответствие каждому непрерывному отображению $f: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ отображение $f_*: \pi_m(X, A, x_0) \to \pi_m(Y, B, y_0)$. Функция ∂ ставит в соответствие каждой тройке (X, A, x_0) и числу $m > 0$ отображение $\partial: \pi_m(X, A, x_0) \to \pi_{m-1}(A, x_0, x_0)$. Отображения f_* и ∂ при $m \geqslant 2$ и в некоторых случаях при $m = 1$ должны быть гомоморфизмами.

Предполагается выполнение следующих аксиом: 1) если f — тождественно отображение, то и f_* — тождественное отображение; 2) $(gf)_* = g_* \circ f_*$; 3) $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$; 4) если отображения f и g гомотопны, то $f_* = g_*$; 5) если $\pi_m(X, x_0, x_0)$ состоит из единственного элемента при всех $m \geqslant 0$, то отображение $\partial: \pi_m(X, A, x_0) \to \pi_{m-1}(A, x_0, x_0)$ взаимно однозначно; 6) если (U, C, u_0), — тройка ассоциированная с тройкой (X, A, x_0), то отображение $p_*: \pi_m(U, C, x_0) \to \pi_m(X, A, x_0)$ взаимно однозначно; 7) $\pi_m(x_0, x_0, x_0) = 0$ при всех $m \geqslant 0$.

Легко доказывается, что при выполнении этих аксиом группа $\pi_m(X, A, x_0)$ при $m \geqslant 2$ и $m = 1$, $A = x_0$ совпадает с m-мерной гомотопической группой пространства X по модулю подмножества A в точке x_0. Автор доказывает также несколько хорошо известных свойств гомотопических групп, исходя из их аксиоматического определения. А. С. Шварц

7755. Отображения вполне нормального пространства в абсолютный окрестностный ретракт. Кодама (Mappings of a fully normal space into an absolute neighborhood retract. Kodama Yukihiro.

Sci. Rept Tokyo Kyoiku Daigaku, 1955, A5, 37—47) (англ.)

Посредством чеховских когомологий с локальными коэффициентами и легкой модификации принадлежащих референту понятий мостов и мостовых отображений (bridges, bridge mappings) автор доказывает обобщения теорем о непрерывных продолжениях и гомотопической классификации, принадлежащих Олуму (Olume P., Ann. Math., 1950, 52, № 2, 1—50) и референту (Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 336—358). Доказательства близко следуют оригинальным доказательствам.

S. T. Hu

Перевод из Math. Revs., 1955, 16, № 7, 735.

7756. Замечание о высших инвариантах Хопфа. Хилтон (Note on the higher Hopf invariants. Hilton P. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 750—752 (англ.)

Построены примеры отображений сфер, имеющие нетривиальные высшие инварианты Хопфа (в смысле автора; РЖМат, 1957, 2967). М. М. Постников

7757. О тождестве Якоби для произведений Уайтхеда. Накаока, Тода (On Jacobi identity for Whitehead products. Nakaoka Minoru, Toda Hirosi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, 45, № 1, 1—13 (англ.)

Двумя различными способами доказывается тождество Якоби для произведения Уайтхеда. В первом доказательстве это тождество непосредственно устанавливается для букета трех сфер, а затем используется тот факт, что этот букет является универсальным примером для тройного произведения Уайтхеда Во втором доказательстве используется тот факт, что произведение Уайтхеда выражается через коммутаторы в торусных гомотопических группах (Fox P., Ann. Math., 1948, 49, 471—510). Центральным пунктом этого доказательства является следующее утверждение: для любого элемента ξ торусной гомотопической группы и любого сферического элемента η этой группы коммутатор элементов ξ и η совпадает с коммутатором элементов η^{-1} и ξ.

Тождество Якоби применяется для изучения одноместной гомотопической операции T_i, $i=2, 3, \ldots$, определяемой по индукции следующими формулами: $T_2(\alpha)=[\alpha, \alpha]$, $T_{i+1}(\alpha)=[\alpha, T_i(\alpha)]$, $\alpha \in \pi_n(X)$. Оказывается, что $3T_3(\alpha)=0$ при четном n, $2T_2(\alpha)=0$ и $T_3(\alpha)=0$ при нечетном n и $T_i(\alpha)=0$, если $i>3$. Кроме того, с помощью приведенных степеней Стинрода доказано, что если $T_3(\alpha)=0$ для всех α (и любого X), то либо n нечетно, либо $n/2$ является степенью тройки. Таким образом, вообще говоря, $T_3(\alpha)\neq 0$. В заключение отмечается, что если $n=2+3^r$, то $T_3(\alpha)=0$ для любого α, когда $r=0$ или $r=1$; для $r>1$ вопрос остается открытым.

М. М. Постников

7758. Четыре применения инвариантов типа препятствий. Адамс (Four applications of the selfobstruction invariants. Adams J. F.), J. London. Math. Soc., 1956, 31, № 122, 148—159 (англ.)

Работа содержит краткое изложение принадлежащего Уайтхеду (РЖМат, 1955, 2601) «геометрического» варианта теории натуральных систем и некоторые его приложения. В частности, показана иллюзорность предложенного Лианг Ма (Лян Ма, Portugaliae math., 1949, 8, 107) обобщения известной теоремы Эйленберга-Маклейна, описан новый подход к построению пространств, уничтожающих гомотопические группы (не связанный, по крайней мере формально, с теорией расслоенных пространств) и рассмотрен один класс клеточных разбиений, имеющих тривиальные факторы (так называемые I_m-разбиения).

М. М. Постников

7759. О продолжении и гомотопической классификации. Мидзуно (On homotopy classification and extension. Mizuno Katuhiko.), J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., 1955, A6, № 2, 55—69 (англ.)

Подробно рассмотрена задача о продолжении и классификации непрерывных отображений в односвязное пространство Y, для которого $\pi_i(Y)=0$, за исключением $i=n$, $i=q$ и $i=r$, где $1<n<q<r<2q-1$. Аналогичная задача (с тех же позиций) была рассмотрена референтом в общем виде без каких-либо ограничений на пространство Y (Докл. АН СССР, 1951, 79, № 4, 573). С точностью до обозначений результаты автора совпадают с результатами референта (специализированными применительно к рассматривасмому случаю). М. М. Постников

7760. Гомотопические группы соединений и объединений. Уайтхед (Homotopy groups of joins and unions. Whitehead George W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 55—69 (англ.)

Пусть X — $(m-1)$-связное ($m\geqslant 2$) пространство, Y — $(n-1)$-связное ($n\geqslant 2$) клеточное разбиение и $X*Y$ — их соединение (совокупность всевозможных отрезков, соединяющих точки пространства X с точками пространства Y). Оказывается, что в группу $\pi(X*Y)=\sum \pi_r(X*Y)$ можно так ввести фильтрацию, что соответствующая присоединенная группа будет предельной группой некоторой спектральной последовательности $\{E^r_{p,q}\}$, для которой $E^2_{p,q}\approx H_{n+p}(Y;\ \pi_{m+q}(X))$, если $q\leqslant m-2$ (имеются в виду приведенные группы гомологий). Отсюда, в частности, следует, что если $X=K(G, m)$, то $\pi_{m+n+s+1}(X*Y)\approx H_{n+s}(Y;\ G)$ для всех $s\leqslant m-1$. Применяя это утверждение к случаю, когда $m=n$ и $Y=K(\Pi, n)$, немедленно получаем известное картановское «соотношение симметрии» для стационарных групп гомотопий пространств Эйленберга—Маклейна:

$$H_{n+s}(\Pi, n; G)\approx H_{n+s}(G, n; \Pi),\ s<n.$$

Построенную спектральную последовательность можно применить также и для изучения гомотопических групп букета $X\vee Y$, потому что, как показано автором, для $r\leqslant m+n+\min(m, n)-2$ группа $\pi_r(X*Y,\ X\vee Y)$ естественно изоморфна группе $\pi_{r+1}(X*Y)$ М. М. Постников

7761. H-пространства и пространства петель. Сугавара (H-spaces and spaces of loops. Sugawara Masahiro), Math. J. Okayama Univ., 1955, 5, № 1, 5—11 (англ.)

Доказано, что если X, E, E', F, Y, B — такие пространства, что: 1) $X\supset E\supset E'\supset F$, $Y\supset B$; 2) E стягиваемо по X в точку; 3) определено умножение $E'\times F\to E$, относительно которого F является H-пространством с гомотопической единицей x_0 и обладает гомотопически обратной операцией (см., например, РЖМат, 1957, 1244); 4) существует такое отображение $p:(X, E, F)\to(Y, B, b_0)$, $b_0\in B$, что $p|E$ является расслоением пространства E со слоем F и с базой B; 5) для любых точек $u\in E'$ и $x\in F$ имеет место соотношение $p(ux)=p(u)$; 6) пространство F стягиваемо по E' в точку x_0 (при сохранении точки x_0 на месте), то существует отображение $f:F\to\Lambda(B)$, где $\Lambda(B)$ — пространство петель базы B в точке b_0, для которого композиция $i\circ f$, где $i:\Lambda(B)\subset\Lambda(Y)$ является H-гомоморфизмом (т. е. гомотопически перестановочна с операциями, определяющими H-строение пространств F и $\Lambda(Y)$. Эта теорема является обобщением одной теоремы Замель-

сона (РЖМат, 1956, 1200) и доказывается аналогично. В частном случае, когда $X = \tilde{e}^{16}$, $E = S^{15}$, E' — множество точек $(e, d) \in S^{15}$ (где e, d — числа Кэли), для которых либо $e \neq 0$, либо $d = 1$, F — слой хопфовского расслоения $p : S^{15} \to S^8$ над точкой $\infty \in S^8$, Y — пространство $S^8 \cup e^{16}$, полученное из сферы S^8 приклеиванием клетки e^{16} посредством отображения p и $B = S^8$, получается следующий результат: существует такое отображение $f : S^7 \to \Lambda(S^8)$, что композиция $i \circ f : S^7 \to \Lambda(S^8 \cup e^{16})$ является H-гомоморфизмом. Оказывается, что для $i \leqslant 20$ отображение $i \circ f$ индуцирует изоморфизм i-мерных гомотопических групп. Таким образом, $\pi_i(S^7) \approx \pi_{i+1}(S^8 \cup e^{16})$ для всех $i \leqslant 20$.

В заключение, следуя Замельсону (РЖМат, 1956, 1200), автор доказывает, что H-пространство S^7 гомотопически не коммутативно, т. е. отображение $(xy) \to xyx^{-1}y^{-1}$ не гомотопно нулю (Замельсон доказал аналогичный результат для сферы S^3).

М. М. Постников

7762. Пространства путей и расслоение пространства. **Онищик Л. Л.**, Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 6, 932—935

Для каждого линейно связного расслоенного пространства E с односвязной базой B и слоем F строится такое расслоенное пространство E_1 с базой E и слоем $\Omega(B)$ (пространством петель в B), что группы гомологий пространства E_1 совпадают с группами гомологий пространства F.

С помощью этой конструкции доказывается ряд теорем о строении групп когомологий пространств петель и однородных многообразий. В приводимых ниже формулировках через $H(X)$ обозначена алгебра когомологий пространства X с коэффициентами в поле действительных чисел.

Теорема 4. Пусть (E, B, F, p) — такое односвязное расслоенное пространство с односвязными слоями, что $H(E)$, $H(B)$, $H(F)$ — внешние алгебры с нечетномерными образующими. Тогда это расслоение гомологически тривиально, т. е. $H(E) = H(B) \otimes H(F)$.

Пусть на односвязном многообразии M транзитивно действует полупростая компактная группа Ли G и пусть U — стационарная подгруппа группы G. Автор описывает строение алгебры когомологий $H(\Omega(M))$ через гомологические свойства вложения группы U в группу G (теорема 5) и утверждает, что следующие три условия эквивалентны: 1) подгруппа U не гомологична нулю в G, 2) $H(M)$ — внешняя алгебра с нечетномерными образующими, 3) $H(\Omega(M))$ — алгебра многочленов (теорема 6). Если $H(M)$ — тензорное произведение алгебр с одной образующей, то $H(\Omega(M))$ вычисляется через гомологии многообразия M и путем сравнения с теоремой 5 устанавливаются связи между гомологиями пространств G, U и M. Доказательства только намечены.

Примечание референта. Перечисленные результаты можно вывести из теории уничтожающих пространств Картана—Серра (РЖМат, 1957, 2659 К).

А. С. Шварц

7763. Одно обобщение понятия расслоенного пространства. Применения к бесконечным симметрическим степеням. **Дольд, Том** (Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis. **Dold Albrecht, Thom René**), C. r. Acad. sci, 1956, **242**, № 13, 1680—1682 (франц.)

Пусть E — топологическое пространство и p — непрерывное отображение пространства E на некоторое хаусдорфово пространство B. Авторы называют отображение p квазирасслоением, если для любой точки $x \in B$ существует такая фундаментальная система окрестностей, что для любой окрестности U этой системы и любой точки $z \in E$, для которой $y = p(z) \in U$, отображение p для всех $i \neq 0$ индуцирует изоморфизмы

$$\pi_i(p^{-1}(U), p^{-1}(y), z) \approx \pi_i(U, y).$$

Для любого квазирасслоения слои $p^{-1}(x)$ имеют один и тот же сингулярный гомотопический тип (если база B линейно связна). Расслоенные пространства в смысле Серра являются, очевидно, квазирасслоенными пространствами в смысле авторов. Обратное, вообще говоря, неверно: для квазирасслоенных пространств теорема о накрывающей гомотопии имеет место лишь в следующей ослабленной форме: если часть $F|_{P \times 0}$ отображения $F : P \times I \to B$, где P — произвольный полиэдр, имеет вид $p \circ f$, где $f : P \to E$, то существует гомотопное относительно $P \times 0$ отображению F отображение $F' : P \times I \to B$, имеющее вид $p \circ G$, где $G : P \times I \to E$. Отображение F' можно построить сколько угодно мало отличающимся от отображения F. Из этой теоремы следует, что для квазирасслоенных пространств теорема о точности гомотопической последовательности остается справедливой.

Пусть теперь E — произвольное линейно связное пространство и e — некоторая его точка. Пусть далее $PS^q(E)$ есть q-я симметрическая степень пространства E. Очевидно, что отображение $E^q \to E^{q+1}$, определенное формулой $(x_1, \ldots, x_q) \to (e, x_1, \ldots, x_q)$, определяет гомеоморфное отображение пространства $PS^q(E)$ в пространство $PS^{q+1}(E)$. Предел $PS(E)$ получающегося спектра пространств авторы называют бесконечной симметрической степенью пространства E. Естественные гомеоморфизмы $E^q \times E^p \to E^{p+q}$ определяют в пространстве $PS(E)$ коммутативное ассоциативное умножение с единицей. Таким образом, $PS(E)$ является H-пространством. Сдвиги в этом пространстве являются, очевидно, гомотопическими эквивалентностями.

Пусть B — связное замкнутое подпространство некоторого пространства A и A/B — пространство, получающееся из пространства A стягиванием подпространства B в одну точку. Оказывается, что если в A существует такая фундаментальная система окрестностей подпространства B, что B является ретрактом каждой из них, то отображение $PS(A) \to PS(A/B)$, индуцированное естественным отображением $A \to A/B$, является квазирасслоением со слоем $PS(B)$. Отсюда, в частности, следует, что группы $\pi_i(PS(A/B))$ удовлетворяют аксиоме точности теории гомологий. Они, очевидно, удовлетворяют и всем остальным аксиомам. Поэтому, согласно теореме единственности теории гомологий, группы $\pi_i(PS(A))$ для любого полиэдра A изоморфны его целочисленным группам гомологий $H_i(A)$. В частности, пространство $PS(S^n)$ является пространством типа $K(Z, n)$. Аналогично, пространство $K(Z_p, n)$ можно описать как некоторое фактор-пространство пространства $PS(S^n)$.

М. М. Постников

7764. Секущие поверхности двукратных расслоений. **Матузявичус А.**, Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 2, 272—275

Рассматриваются двукратные расслоения, т. е. такие отображения

$$P_2 \xrightarrow{p'} P_1 \xrightarrow{p} B,$$

каждое из которых определяет расслоенное пространство. Слои этих расслоений обозначаются через C' и C_1 и предполагаются гомотопически простыми соответственно в размерностях $r-1$ и r. База B предполагается симплициальным (или клеточным) разбиением. Предположим, что на остове B^r заданы в расслоении

$P_1 \xrightarrow{p} B$ две секущие поверхности, совпадающие на B^{r-1}, и $D^r \in H^r(B^r, \pi_r(C_1))$ — класс контрагомологии их различающей. (В работе учтено предложение референта о замене термина «когомологии» термином «контрагомологии»). Предположим далее, что в расслоениях, индуцированных этими секущими поверхностями, и расслоенным пространством $P_2 \xrightarrow{p'} P_1$, можно на B^{r-1} построить секущую поверхность (общую для обоих индуцированных пространств), и обозначим через Z_1^r, $Z_2^r \in H^r(B^r, \pi_{r-1}(C'))$ классы контрагомологий их препятствий.

Автор доказывает формулу

$$Z_1^r - Z_2^r = \hat{\Delta} D^r,$$

где $\hat{\Delta} : H^r(B^r, \pi_r(C_1)) \to H^r(B^r, \pi_{r-1}(C'))$ — гомоморфизм, порожденный граничным гомоморфизмом $\Delta : \pi_r(C_1) \to \pi_{r-1}(C')$ расслоенного пространства $(p')^{-1}(C_1) \xrightarrow{p'} C_1$. В. Г. Болтянский

7765. О собственных изоморфизмах (μ, Δ, γ)-систем. I. Чжан Су-чэн (张素誠 撲學中 (μ, Δ, γ)-系統的正則同模論. I. 張素誠), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 2, 270—301 (кит.; рез. англ.)

Пусть H^1, H^2, ... и $H^1(2)$, $H^2(2)$, ... — две последовательности абелевых групп. Говорят, что эти последовательности образуют (μ, Δ, γ)-систему, если для любого n заданы некоторые гомоморфизмы

$$\mu^n : H^n \to H^n(2), \quad \Delta^n : H^n(2) \to {}_2H^{n+1},$$

$$\gamma_p^n : H^n(2) \to H^{n+p} \quad (2),$$

где p — произвольное четное число. Отображение одной (μ, Δ, γ)-системы в другую называется собственным, если оно перестановочно гомоморфизмами μ, Δ и γ. Автор рассматривает (μ, Δ, γ)-системы частного вида, для которых все гомоморфизмы γ, за исключением двух γ_p^n и γ_k^m, тривиальны и, кроме того, одно (и только одно) из четырех чисел n, $n+1$, $n+p$ и $n+p+1$ совпадает с одним из чисел m, $m+1$, $m+k$, $m+k+1$. Для систем такого вида в работе строится полная система числовых инвариантов (относительно собственных изоморфизмов) и находятся нормальные формы. Если (μ, Δ, γ)-система возникает из некоторого пространства x (т. е. если $H^n = H^n(X, Z)$, $H^n(2) = H^n(X, Z_2)$, μ — естественное отображение, Δ — гомоморфизм Бокштейна и γ_p^n — квадраты Стинрода), то эти числовые инварианты являются гомотопическими инвариантами пространства x. Некоторые из получающихся таким образом числовых инвариантов до сих пор не были известны. М. М. Постников

7766. Когомологии p-кратных циклических степеней. Накаока (Cohomology of the p-fold cyclic products. Nakaoka Minoru), Proc. Japan. Acad., 1955, **31**, № 10, 665—669 (англ.)

Пусть W — конечное симплициальное разбиение и t — его симплициальное отображение на себя, имеющее период p, совокупность F неподвижных точек которого является подразбиением разбиения W. Пусть $t^{\#} : C^r(W, F) \to C^r(W, F)$ — коцепное отображение, индуцированное преобразованием t (для простоты мы предполагаем, что группой коэффициентов является группа Z_p вычетов по модулю p, хотя некоторые из излагаемых ниже результатов остаются справедливыми и для любой области коэффициентов). Положим $\sigma = 1 + t^{\#} + t^{\#2} + \ldots + t^{\#p-1}$ и $\tau = 1 - t^{\#}$. Пусть ρ — одно из отображений σ или τ, а $\bar{\rho}$ — другое. Очевидно, что $\operatorname{Im}\rho$ является подкомплексом коцепного комплекса $C(W, F)$ пары (W, F). Легко видеть, что группы когомологий этого подкомплекса (они обозначаются через ${}^{\rho}H^r(W, F)$ изоморфны группам когомологий пары $(C(W, F), \operatorname{Im}\bar{\rho})$ (ибо $\operatorname{Im}\rho = \operatorname{Ker}\bar{\rho}$). Следовательно, гомологическую последовательность этой пары можно переписать в следующем виде:

$$\ldots \to {}^{\bar{\rho}}H^r(W, F) \xrightarrow{\alpha_\rho} H^r(W, F) \xrightarrow{\beta_\rho}$$

$$\xrightarrow{\beta_\rho} {}^{\rho}H^r(W, F) \xrightarrow{\gamma_\rho} {}^{\bar{\rho}}H^{r+1}(W, F) \to \ldots$$

Это — точная последовательность Ричардсона—Смита.

Пусть W_t — пространство орбит преобразования t. Это пространство также является симплициальным разбиением, а $F_t = \pi(F)$ — его подразбиением. При этом естественное отображение $\pi : W \to W_t$ симплициально. Легко видеть, что отображение π индуцирует изоморфизм $H^r(W_t, F_t) \approx {}^{\sigma}H^r(W, F)$. Этот изоморфизм обозначается через I^*. Очевидно, что $\sigma^2 = p\sigma$ и, следовательно, $\operatorname{Im}\sigma \subset \operatorname{Im}\tau$. Отображение ${}^{\sigma}H^r(W, F) \to {}^{\tau}H^r(W, F)$, индуцированное этим вложением, обозначается через ψ. Очевидно, что $\operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Im}\pi^{\#}$, и, следовательно, существует такое коцепное отображение $\varphi : C^r(W) \to C^r(W_t)$, что $\pi^{\#}\varphi = \sigma$. Это отображение индуцирует некоторый гомоморфизм $H^r(W) \to H^r(W_t, F_t)$, который обозначается через φ_0^*. Автор утверждает, что гомоморфизмы $\mu = I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^*$, $\nu = I^{*-1}\gamma_\tau\varphi I^*$ и φ_0^* связаны следующими соотношениями: $\nu^2 = \varepsilon\mu$, $\mu\nu = \nu\mu$, $\nu\varphi_0^* = \varepsilon\delta^*\pi^{*-1}i^*$, $\mu\varphi_0^* = -\nu\delta^*\pi^{*-1}i$, где $\varepsilon = 0$, если $p \geqslant 3$, и $\varepsilon = 1$, если $p = 2$, δ^* — кограничный оператор пары (W_t, F_t), а i^* — гомоморфизм, индуцированный вложением $F \subset W$. Кроме того, для любых элементов $a, b \in H^*(W_t)$ имеют место соотношения $\mu^\alpha(a) \cup \mu^\beta(b) = \mu^{\alpha+\beta}(a \cup b)$, $\mu^\alpha(a) \cup \nu(b) = (-1)^{\dim a}\mu^\alpha\nu \quad (a \cup b)$, $\nu(a) \cup \nu(b) = \varepsilon\mu(a \cup b)$, а для любых элементов a', $b' \in H^*(W)$ — соотношения

$$\varphi_0^*(a' \cup_\sigma b') = \varphi_0^*(a') \cup \varphi_0^*(b'),$$

$$\nu(\varphi_0^*(a') \cup \varphi_0^*(b')) = \mu(\varphi_0^*(a') \cup \varphi_0^*(b')) = 0.$$

Наконец, $P^s\mu - \mu P^s = \mu^p P^{s-1}$, $P^s\nu = \nu P^s$, $Sq^i\nu - \nu Sq^i = \nu^2 Sq^{i-1}$, $\varphi_0^* P^s - P^s\varphi_0^* = \mu^{p-1}P^{s-1}\Phi_0^*$, $\varphi_0^* Sq^i - Sq^i\varphi_0^* = \nu Sq^{i-1}\varphi_0^*$, $\Delta_p\nu + \nu\Delta_p = \mu$, $\mu\Delta_p = \Delta_p\mu$, $\varphi_0^*\Delta_p - \Delta_p\varphi_0^* = \delta^*\pi^{*-1}i^*$, где P^s — приведенные степени Стинрода (для $p \geqslant 3$), Sq^i — квадраты Стинрода (для $p = 2$) и Δ_p — гомоморфизм Бокштейна (для любого p).

Эти общие результаты применяются к исследованию p-кратной циклической степени произвольного конечного разбиения K. В этом случае $W = K \times \ldots \times K$ (p множителей), отображение t определяется циклической перестановкой множителей, а F является диагональю, т. е. множеством точек вида $(x, x, \ldots, x)$, $x \in K$. Отображение $d_0 : K \to F_t$, определенное формулой $d_0(x) = \pi(x, x, \ldots, x)$, очевидно гомеоморфно. Пусть

$$E_{2\alpha+1} = \mu^\alpha\delta^* d_0^{*-1} \quad \text{и} \quad E_{2\alpha+2} = \mu^\alpha\nu\delta^* d_0^{*-1}.$$

Утверждается, что если $1 \leqslant s \leqslant (p-1)q$, то отображение E_s: $H^q(K) \to H^{q+s}(W_t, F_t)$ является изоморфизмом. Кроме того,

$$\operatorname{Ker} \tau_r^* = \sum_{s=m}^{r-1} \operatorname{Im} E_{r-s}, \text{ где } m = \left[\frac{r+p-1}{p}\right],$$

$$\operatorname{Ker} \varphi_0^* = \tau^*\left(V^{'r}(\Omega(K))\right) \text{ и } H^r(W_t, F_t) =$$

$$= \operatorname{Ker} \pi_r^* + \varphi_0^*(V^{'r}(\Omega(K))),$$

где $\Omega(K)$ — некоторая база модуля $H^*(K)$, состоящая из однородных элементов, а $V^{'r}(\Omega(K))$ — подмодуль модуля $H^r(W)$, порожденный элементами вида $b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_r$, где $b_i \in \Omega(K)$, причем существует такое i, что $b_1 \neq b_i$. Тем самым группы $H^r(W_t, F_t)$, а, следовательно, и группы $H^r(W_t)$ достаточно хорошо описаны. Например, из этого описания немедленно вытекает следующая формула для рангов (чисел Бетти):

$$R_r(W_t) = \sum_{m \leqslant s \leqslant r-2} R_s(K) + \frac{1}{p}(P_r(W) - R_{r/p}(K))$$

(если r не делится на p, то считается, что $R_{r/p}(K) = 0$).

Указанные выше формулы для когомологических операций позволяют в рамках указанного описания полностью вычислить операции P^s, S_q^i и Δ_p в пространстве W_t. Соответствующие формулы ввиду их сложности мы приводить не будем.

Специально рассматривается случай $K = S^n$ (Другими методами этот случай был рассмотрен ранее Ляо; РЖМат, 1956, 5162). Пусть $e_n^\#$ — образующая группы $H^n(S^n)$. Для любого s, удовлетворяющего неравенствам $n+2 \leqslant s \leqslant np$ положим $a_s^\# = j^* E_{s-n}(e_n^\#)$, где j^* — отображение, индуцированное вложением $(W_t, \Phi_0^*) \subset (W_t, F_t)$. Для любой системы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, где $1 \leqslant q \leqslant p$, различных вычетов по модулю p, положим $g_{nq}^\#(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = j^* \Phi_0^*(x_1, \ldots, x_q)$, где $x_i = e_n^\#$, если существует такое k, что $i \equiv \alpha_k \pmod p$, и $x_i = 1^\#$ в противном случае (через $1^\#$ обозначается единичный класс когомологий). Утверждается, что элементы вида $a_s^\#$ и $g_{nq}^\#(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ отличны от нуля; $g_{nq}^\#(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \pm g_{nq}^\#(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ тогда и только тогда, когда существует такое k, что $\alpha_i \equiv \beta_i + k \pmod p$ для всех i; элементы $1^\#$, $a_s^\#$ $(n+2 \leqslant s \leqslant np)$ и различные элементы вида $g_{nq}^\#(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ $(1 \leqslant q \leqslant p-1)$ образуют базу модуля $H^*(W_t)$; когомологические операции выражаются в этой базе формулами:

$$\Delta_p g_{nq}^\#(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = 0,\ \Delta_p a_{n+2\alpha+1}^\# = 0,\quad \Delta_p a_{n+2\alpha+2}^\# =$$

$$= a_{n+2\alpha+3}^\#;\ P^s g_n^\#(1) = (-1)^{s+1} a_{n+2s(p-1)}^\# \ (s > 0),$$

$$P^s g_{nq}^\#(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = 0 \ (q > 0,\ s > 0),\ P^s a_{n+2\alpha+1}^\# =$$

$$= C_s^\alpha a_{n+2s(p-1)+2\alpha+1}^\#,\ P^s a_{n+2\alpha+2}^\# = C_s^\alpha a_{n+2s(p-1)+2\alpha+2}^\#;$$

$$S_q^i g_n^\#(1) = a_{n+i}^\# \ (i \geqslant 2),\ S q^i a_{n+\alpha+1}^\# = C_i^\alpha a_{n+\alpha+i+1}^\#.$$

В заключение определяются целочисленные группы когомологий p-кратной циклической степени сферы S^n. Оказывается, что эти группы не имеют q-кручения для $q \neq p$. В размерностях np, где n для $p = 2$ четно, ранг группы когомологий равен единице, а в размерностях nq, где $1 \leqslant q \leqslant p-1$, этот ранг равен C_q^p/p. В остальных размерностях ранг равен нулю. Наконец, p-ранг группы когомологий равен единице в размерности i, если разность $i - n$ нечетна и $3 \leqslant i - n \leqslant (p-1)n$. Во всех других размерностях p-ранг равен нулю.

Замеченная опечатка: на стр. 669 в строке 10 вместо np нужно nq. М. М. Постников

7767. Кольцо когомологий пространства G/T. Ботт, Замельсон (The cohomology ring of G/T. Bott R., Samelson H.), Proc. Nat. Acad. Sci USA, 1955, **41**, № 7, 490—493 (англ.)

Излагается новый метод вычисления кольца когомологий фактор-пространства G/T компактной (полупростой) группы Ли G по максимальному тору T. Этот метод основан на рассмотрении некоторого многообразия B, полностью определяющегося диаграммой группы G. Кольцо когомологий $H^*(B)$ многообразия B (над кольцом Z целых чисел) изоморфно фактор-кольцу кольца многочленов $Z[x_1, \ldots, x_m]$, где $m = \dfrac{n-l}{2}$ (l — ранг группы G) и $\dim x_i = 2$ для всех $i = 1, \ldots, m$, по идеалу, порожденному элементами $x_k^2 + \sum_1^{k-1} a_{ik} x_i x_k$, $k = 1, \ldots, m$, где $a_{ij} = (2\theta_i\theta_j)/(\theta_i - \theta_j)$ — числа Картана группы G. Кручения кольцо $H^*(B)$ не имеет. Утверждается, что существует такое отображение $f: B \to G/T$, что: 1) степень отображения f равна единице (отсюда, в силу известных результатов Хопфа, вытекает, что фактор-пространство G/T тоже не имеет кручения); 2) кольцо $H^*(G/T)$ изоморфно наименьшему подкольцу кольца $H^*(B)$, аддитивная группа которого является прямым слагаемым аддитивной группы кольца $H^*(B)$, содержащим группу $f^*H^2(G/T)$. Строение последней группы также полностью определяется диаграммой группы G. В качестве примера вычисляется кольцо $H^*(G_2/T)$.

В конце работы рассматриваются когомологии фактор-пространства группы G по связной подгруппе максимального ранга. М. М. Постников

7768. О характеристических классах Понтрягина. I. У Вэнь-цзюнь (On Pontrjagin classes. I. Wu Wen-Tsün), (論 Понтрягин 示性類. I. 吳文俊), 中國科學, Чжунго кэсюэ, Acta sci. sinica, 1954, **3**, № 4, 353—367 (англ.)

Английский перевод опубликованной работы (РЖМат, 1955, 4312).

7769. О характеристических классах Понтрягина. II. У Вэнь-цзюнь (論 Понтрягин 示性類 II. о 吳文俊), 數學學報, Шусюэ, сюэбао, 1954, **4**, № 2, 171—199 (кит.; рез. англ.)

В комплексном многообразии Грассмана $C_{n,m}$ рассматриваются классы когомологий D_p^{2r} $(0 < r \leqslant m(p-1))$ по модулю p, определенные формулой

$$D_p^{2r} = \begin{cases} 0, \text{ если } r \not\equiv 0 \bmod (p-1), \\ \sum_j^{(r)} \dfrac{(-1)^j}{j!} \left(\sum_i^{[p-1]} \dfrac{(-1)^i}{i} (C_p^2 + \ldots + C_p^{2m})^i \right)^j, \\ \text{если } r = t(p-1), \end{cases}$$

где C_p^{2k} — приведенные по модулю p классы Черна, индекс $[p-1]$ при знаке суммы обозначает, что суммирование распространено лишь на члены, размерности которых делятся на $2[p-1]$, а индекс (r) — что суммирование распространено лишь на члены, размерности которых равны $2r$. Образы этих классов при гомоморфизме, индуцированном естественным

отображением $R_{n,m} \to C_{n,m}$, где $R_{n,m}$ — действительное многообразие Грассмана, обозначаются через Q_p^{2r}, а образы классов Q_p^{2r} при гомоморфизме, индуцированном тангенциальным отображением $M \to R_{n,m}$ гладкого m-мерного ориентируемого многообразия M в многообразие $R_{n,m}$ — через $Q_p^{2r}(M)$ (последнее обозначение принадлежит референту). Оказывается, и это следует рассматривать как основной результат работы, что классы $Q_p^{2r}(M)$ топологически инвариантны, т. е. не зависят от гладкости, введенной в многообразие M. Доказательство основывается на некотором выражении классов $Q_p^{2r}(M)$ через фундаментальный класс многообразия с помощью топологически инвариантных операций (в том числе степеней Стинрода). С другой стороны, эти классы связаны с приведенными по модулю p классами Понтрягина P_p^{4k} следующими соотношениями:

$$Q_p^{2t(p-1)} =$$

$$= \sum_j^{(t(p-1))} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\sum_i^{[p-1]} \frac{(-1)^i}{i} \left(-P_p^4 + P_p^8 - \ldots\right)^i \right)^j$$

(верхние индексы у знаков суммы имеют то же значение, что и выше). В частности, для $p = 3$

$$Q_3^{4k} = \sum_{i+j=k} P_3^{4i} P_3^{4j}.$$

Так как из последних соотношений классы P_3^{4i} можно выразить через классы Q_3^{4k}, то тем самым доказана топологическая инвариантность приведенных по модулю 3 классов Понтрягина любого ориентируемого многообразия.

В заключение автор находит для классов $Q_p^{2r}(M)$ явные формулы, аналогичные известным формулам для классов Штифеля-Уитнея (также доказываемым в этой работе). М. М. Постников

7770. О характеристических классах Понтрягина. II. У Вэнь-цзюнь (On Pontrjagin classes. II. Wu Wen-tsun), (論 Понтрягин 示性類. II. 吳文俊), 中國科學, Чжунго кюсюэ, Acta Sci. Sinica, 1955, 4, № 4, 455—490 (англ.)

Английский перевод опубликованной ранее работы (реф. 7769).

7771. О характеристических классах Понтрягина. III. У Вэнь-цзюнь (論 Понтрягин 示性類. III. 吳文俊), 數學學報, Шусюэ сюэбао, 1954, 4, № 3, 323—346 (кит.; рез. англ.)

Вычислен квадрат Понтрягина в многообразии Грассмана. Оказывается, что квадрат Понтрягина классов Штифеля выражается через приведенные по модулю 4 классы Понтрягина. Отсюда вытекает, что приведенные по модулю 4 характеристические классы Понтрягина любого многообразия топологически инвариантны. Сопоставляя этот результат с результатами предыдущей статьи (реф. 7769), получаем топологическую инвариантность приведенных по модулю 12 характеристических классов Понтрягина любого многообразия.

М. М. Постников

7772. О характеристических классах Понтрягина (IV). У Вэнь-цзюнь (論 Понтрягин 示性類 IV. 吳文俊), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 1, 37—63 (кит.; рез. англ.)

Заново доказывается (без явного применения степеней Стинрода) топологическая инвариантность приведенных по модулю 3 характеристических классов Понтрягина любого замкнутого дифференцируемого многообразия. М. М. Постников

7773. О характеристических классах Понтрягина. V. У Вэнь-цзюнь (論 Понтрягин 示性類 V. 吳文俊), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 3, 401—410 (кит.; рез. англ.)

Новое доказательство явного выражения для классов Q_p^{2r}, полученного автором ранее (реф. 7769).

М. М. Постников

7774. О пространствах, на которых действует конечная группа. Коннер (Concerning the action of finite group. Conner P. E.), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1956, 42, № 6, 349—351 (англ.)

Формулируются три теоремы.

Теорема 1. Пусть на бикомпакте X действует конечная группа G, Y — пространство, получающееся из X отождествлением точек, эквивалентных относительно группы G, $\pi: X \to Y$ — естественное отображение. Тогда отображение $\pi^*: H^s(Y) \to H^s(X)$ мономорфно, а образ его состоит из всех элементов, инвариантных относительно автоморфизмов, порождаемых преобразованиями группы G. (через $H^s(X)$ обозначается s-мерная группа когомологий с коэффициентами в поле рациональных чисел).

Автор называет группу G преобразований пространства X допустимой, если выполнено одно из следующих условий: а) X — дифференцируемое многообразие с краем и преобразования группы G дифференцируемы; б) X — конечный клеточный комплекс и преобразования группы G — клеточные отображения, а множество точек, инвариантных относительно преобразования $g \in G$, образует подкомплекс; в) пространство X когомологически локально связно по простому модулю p и порядок группы G равен p^j.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 группа преобразований G допустима, то $\chi(Y) = \frac{1}{r} \sum_g \chi(F_g)$, где через F_g обозначено множество точек бикомпакта X, инвариантных относительно преобразования $g \in G$ (символ $\chi(T)$ обозначает эйлерову характеристику пространства T, через r обозначен порядок группы G).

Теорема 3. Если компактная связная коммутативная группа Ли L непрерывно действует на замкнутом многообразии M, то $\chi(F) = \chi(M)$, где F — множество точек, неподвижных относительно группы L.

А. С. Шварц

7775. Соотношения между группами когомологий Дольбо и топологическими инвариантами. Фрёлихер (Relations between the cohomology groups of Dolbeault and topological invariants. Fröli-cher Alfred), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1955, 41, № 9, 641—644 (англ.)

Пусть M — комплексно-аналитическое многообразие комплексной размерности m. Рассмотрим дифференциальный градуированный C-модуль T (где C — поле комплексных чисел) комплексных дифференциальных форм на многообразии M. Введем в модуль T фильтрацию $\{{}^pT\}$, определив ${}^pT$ как совокупность всех форм, имеющих относительно $dz^1, \ldots, dz^m$ (где $z^1, \ldots, z^m$ — локальные координаты) степень $\geqslant p$. Легко видеть, что для любых p и q однородная составляющая $E_1^{p,q}$ первого члена спектральной последовательности, соответствующей этой фильтрации, изоморфна группе Дольбо $H^q(M, \Omega^p)$ (q-мерной группе когомологий многообразия M с коэффициентами в пучке Ω^p ростков дифференциальных форм степени p). С другой стороны, согласно общей теории

Лере, предел E_∞ этой спектральной последовательности является группой, присоединенной к соответствующим образом профильтрованной группе классов когомологий дифференциальных форм (группе де Рама). Таким образом, существует спектральная последовательность, связывающая группы Дольбо (аналитические инварианты) и группы де Рама (топологические инварианты). Отсюда, например, следует, что $\chi = \sum_{p,\,q=0}^{m} (-1)^{p+q} b_{p,\,q}$, где χ — эйлерова характеристика многообразия M, а $b_{p,q}$ — размерность (ранг) модуля $H^p(M,\ \Omega^q)$. Аналогично, $b_r \leqslant \sum_{p+q=r} b_{p,\,q}$, где b_r — числа Бетти многообразия M (т. е. размерности модулей $H^r(M,\ C)$). Для келеровых многообразий $E_1 = E_\infty$ и поэтому $H^n(M,\ C) = \sum_{p+q=r} H^p(M,\ \Omega^p)$ (впрочем, эта формула известна); в частности, $b_r = \sum_{p+q=r} b_{p,\,q}$.

М. М. Постников

7776 К. Элементы математики. XVI. 1-я ч. Фундаментальные построения анализа. Книга III. Общая топология (сводка результатов). Бурбаки (Eléments de mathématique. XVI. 1e part. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III. Topologie générale (fascicule de résultats). Bourbaki N. (Actual. scient. et industr. № 1196). Paris, Hermann & Cie, 1953, 95 p.) (франц.)

7777 К. Элементы математики. V. 1-я ч. Фундаментальные построения анализа. Книга III. Общая топология. Гл. V. Однопараметрические группы. Гл. VI. Числовые и проективные пространства. Гл. VII. Аддитивные группы. Гл. VIII. Комплексные числа. Бурбаки (Eléments de mathématique. V. 1e part. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitre V. Groupes à un paramètre. Chapitre VI. Espaces numériques et espaces projectifs. Chapitre VII. Les groupes additifs R^n. Chapitre VIII. Nombres complexes. 2e. éd. Bourbaki N. (Actual. scient. et industr. № 1235 (1029)). Paris, Hermann & Cie, 1955, 133 p.) (франц.)

7778 К. Основы комбинаторной топологии. Понтрягин (Grundzüge der kombinatorischen Topologie. Pontrjagin L. S. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch Zerl. Wiss., 1956, 133 S.) (нем.)

Немецкий перевод русского издания (Гостехиздат, М., 1947). В книге дано краткое, но весьма педантичное изложение теории гомологий. В § 1 строго отобраны лишь необходимые для дальнейшего сведения о линейном пространстве n измерений и о выпуклых телах; это дает возможность установить элементарные свойства симплекса и быстро доказать теоремы реализации комплекса в евклидовом пространстве (§ 2). § 3 является отклонением от основной темы и дает приложение предыдущих теорем к теории размерности. §§ 4, 5, 6 излагают основные гомологические понятия: ориентация, цепь, граница, гомологии, группы Бетти; затем доказывается теорема Эйлера—Пуанкаре. Гл. II почти вся занята доказательством топологической инвариантности группы Бетти. § 10 снова уводит читателя в теорию размерности; здесь при помощи леммы Шпернера устанавливается, что размерность r-мерного полиэдра равна r. Доказывается теорема Брауэра о неподвижной точке. В гл. III изучаются непрерывные отображения полиэдра. В § 13 определяется понятие гомотопии двух отображений и устанавливаются основные свойства гомотопии. §§ 14, 15 дают построение гомологических инвариантов непрерывных отображений. Вводится понятие гомотопической эквивалентности двух полиэдров. В § 16 устанавливается формула Хопфа для непрерывных отображений и доказывается теорема существования неподвижных точек.

Переводчик снабдил книгу дополнительным списком литературы и указателями.

В. А. Ефремович

7779 К. Комбинаторная топология. Александров (Combinatorial topology. Vol. 1. Aleksandrov P. S. Transl. from the Russ. New York, Graylock Press, 1956, 241 pp., 4. 95 doll.), Publishers Weekly, 1957, 171, № 12, 47 (англ.)

7780 К. Топология в структурах. Нортхем (Topology in lattices. Northam Edward Stafford. — Doct. diss. Michigan State Univ., 1953), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 12, 2537—2538 (англ.)

См. также РЖМат, 1955, 1686.

См. также: 7662, 7664, 7665, 8034, 8199, 8201, 8202, 8219, 2828

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7781. Теоремы о продолжении относительной меры в некоторых семействах множеств. Кафьеро (Teoremi di prolungamento per le misure relative in particolari reticoli d'insiemi. Cafiero Federico), Ricerche mat., 1956, 5, № 2, 273—312 (итал.)

Приводится вариант построения теории меры на абстрактном множестве. В основе аппарата излагаемой теории лежат понятия $\bigcup$- и $\bigcap$-нормальности семейства множеств. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств множества S называется $\bigcup$-нормальным ($\bigcap$-нормальным), если $\mathscr{F}$ содержит объединение всех $X \in \mathscr{F}$ и пустое множество и если для всякого $X \in \mathscr{F}$ существуют такие последовательности $X_n \in \mathscr{F}$ и $X'_n \in \mathscr{F}'$ (где $\mathscr{F}'$ — семейство дополнений всех $X \in \mathscr{F}$ относительно объединения всех $X \in \mathscr{F}$), что $X'_n \subset X_n \subset X'_{n+1}$ при $n \in N$ (N-множество натуральных чисел) (соответственно $X'_n \supset X_n \supset X'_{n+1}$ при $n \in N$) и $\lim X_n = X$. В конце работы затрагиваются вопросы, возникающие при введении топологии.

П. И. Романовский

7782. Емкость обобщенных канторовых множеств. Оцука (Capacité d'ensembles de Cantor généralisés. Ohtsuka Makoto), Nagoya Math. J., 1957, 11, 151—160 (франц.)

Пусть $\{k_q\}$ и $\{p_q\}$ — последовательности целых чисел, больших 1, $l_q = (k_q p_q)^{-1}$. Пусть I — сегмент длины $d > 0$, удалим из I $k_q - 1$ интервалов одинаковой длины так, чтобы осталось k_q сегментов одинаковой длины $l_q d$; эту операцию назовем q-операцией, приложенной к I. Применим 1-операцию к $[0, 1]$, затем 2-операцию к каждому из оставшихся сегментов, 3-операцию к каждому из сегментов, оставшихся после 2-операции, и т. д. Предельное множество $F = F(k_q,\ p_q)$ назовем обобщенным канторовым множеством на прямой. Обобщенным симметрическим канторовым множеством в n-мерном евклидовом про-

странстве называется топологическое произведение множеств F на осях координат.

Дано необходимое и достаточное условие, чтобы обобщенное симметрическое канторово множество в n-мерном пространстве ($n \geqslant 1$) имело нулевую логарифмическую емкость, а также нулевую α-емкость ($0 < \alpha < n$). Для случая $n = 1$ при дополнительном предположении $p_q \geqslant p_0 > 1$, $q = 1, 2, \ldots$, критерий был получен автором ранее (РЖМат, 1956, 5840); полученный в статье критерий содержит также результаты Хельстрёма (РЖМат, 1956, 7995; 1957, 6252).
А. А. Гольдберг

7783. К проблеме сложной квазинепрерывной функции. Арнезе (Contributo al problema delle funzioni quasi cotinue composte. Arnese Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 6, 387—394 (итал.)

Пользуясь терминологией и обозначениями книги Пиконе и Вьола (Picone M., Viola T., Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione, Torino, 1952), автор изучает условия квазинепрерывности сложной функции $\varphi[f_1(P), \ldots, f_n(P)]$ и связанные с этим вопросы, где $f_k(P)$ квазинепрерывны относительно элементарной массы $\alpha(T)$ в лебеговом множестве евклидова пространства S_r.
П. И. Романовский

7784. Об одном интегральном неравенстве. Роджерс (A single integral inequality. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 102—110 (англ.)

Доказывается, что если $\rho_i(X) \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — интегрируемые по Лебегу функции в n-мерном пространстве, c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ — постоянные, то

$$\int \cdots \int \prod_{i=1}^{n} \rho_i \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} X_j \right) dX_1 \ldots dX_m$$

не уменьшается после сферической симметризации функций.

Частный случай этой теоремы рассматривался ранее (РЖМат, 1957, 278).
П. И. Романовский

7785. Общая интерполяционная теорема для линейных операций. Котляр (A general interpolation theorem for linear operations. Cotlar M.), Rev. mat. cuyana, 1955, 1, № 2, 57—84 (англ.)

Пусть D — множество всех ступенчатых функций, заданных в n-мерном евклидовом пространстве R^n, и Tf — оператор, определенный на D, переводящий всякую $f \in D$ в некоторую функцию Tf так, что $|T(f_1 + f_2)(x)| \leqslant |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$ для всех $x \in R^n$ и $f_1, f_2 \in D$.

Оператор T называется оператором типа p, если

$$\|Tf\|_p^p = \int_{R^n} |Tf|^p \, dx \leqslant M \int_{R^n} |f|^p \, dx = M \|f\|_p^p$$

для всех $f \in D$ и некоторой не зависящей от f константы M. Известна теорема М. Риса (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, гл. IX): Если оператор T одновременно типа p_1 и типа p_2, $1 \leqslant p_1 < p_2$, т. е. если

$$\|Tf\|_{p_1} \leqslant A \|f\|_{p_1}, \tag{1}$$

$$\|Tf\|_{p_2} \leqslant B \|f\|_{p_2}, \tag{2}$$

то он и типа p, т. е.

$$\|Tf\|_p \leqslant C \|f\|_p, \tag{3}$$

где $p_1 < p < p_2$.

В работе показывается, что (3) будет верно и в том случае, если в (1) и (2) вместо $\|Tf\|_{p_1}$ и $\|Tf\|_{p_2}$ будут стоять меньшие величины. Это достигается введением меньшей области, по которой интегрируется $|Tf(x)|^{p_i}$, и некоторыми изменениями функции $f(x)$.

Автор дает доказательства, не опирающиеся на теорему Риса.
И. А. Егорова

7786. Некоторые обобщения одной теоремы Харди—Литлвуда. Котляр (Some generalizations of the Hardy—Littlewood maximal theorem. Cotlar M.), Rev. mat. cuyana, 1955, 1, № 2, 85—104 (англ.; рез. исп.)

Пусть $D = \{f(x)\}$ — множество функций, плотное во всяком пространстве $L^p(R^n)$, и $T = Tf$ — оператор, определенный на D, и такой, что

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leqslant |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$$

для всех $x \in R^n$ и $f_1, f_2 \in D$.

Если M — другой оператор и $|Mf(x)| \leqslant |Tf(x)|$ для всякой f, то, очевидно, из того, что T есть оператор типа p или m-типа p (реф. 7785), следует, что и оператор M также типа p или m-типа p.

Вводятся следующие определения:

1. $|M| \prec A|T|$, если для всякой $f \in D$ и для всякой точки $x \in R^n$ существует n-мерный куб $Q(x)$ с центром в x (и с ребрами, параллельными координатным осям) такой, что

$$|Mf(x)| \leqslant \frac{A}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |Tf(t)| \, dt =$$

$$= \frac{A}{|Q(x)|} \int \varphi_{Q(x)}(t) |Tf(t)| \, dt,$$

где $\varphi_{Q(x)}$ — характеристическая функция множества $Q(x)$.

2. $|M| \ll A|T|$, если для всяких $f \in D$ и $x \in R^n$ существует куб $Q(x)$ с центром в x такой, что

$$|Mf(x)| \leqslant \frac{A}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |T(\varphi_{Q(x)} f)(t)| \, dt.$$

В этих обозначениях максимальный оператор Харди—Литлвуда (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, гл. X) имеет вид:

$$\Lambda f(x) = \sup_{Q(x)} \left\{ \frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |f(t)| \, dt \right\}$$

и поэтому соотношение $|M| \prec A|T|$ эквивалентно соотношению $|Mf(x)| \leqslant A\Lambda f(x)$.

Доказывается ряд результатов относительно принадлежности какому-нибудь типу операторов, связанных соотношениями «$\prec$» и «$\ll$». Рассматриваемая теорема Харди—Литлвуда содержится в этих результатах. Автор дает доказательства, не опирающиеся на теорему Харди—Литлвуда.

Рассматриваются также аналогичные вопросы для операторов, определенных на плотных подмножествах в пространствах $L^p(R^n \times R^m)$.
И. А. Егорова

7787. Унифицированная теория гильбертовых преобразований и эргодических теорем. Котляр (A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems. Cotlar Mischa), Rev. mat. cuyana, 1955, 1, №2, 105—167 (англ.; рез. исп.)

Автор отмечает, что есть полная аналогия между основными теоремами теории гильбертовых преобразований и эргодической теорией, однако до сих пор разработка обеих теорий велась совершенно различными методами. Это вызывалось тем, что эргодическая теория имеет дело с положительными операторами, а гильбертовы преобразования осуществляются не положительными операторами. Автор ставит перед собой задачу — построить общую теорию, которая содержала бы, как частные случаи, обе упомянутые выше теории.

Пусть $R^n = \{x\}$ — n-мерное евклидово пространство, $K(x)$ — интегрируемая функция и $K_i(x) = 2^{-ni} K(2^{-i}x)$,

$i=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Если $\Omega=\{P\}$ — абстрактное пространство с мерой μ и n-мерной непрерывной группой $\{\sigma_x\}$ $(x\in R^n)$ преобразований, сохраняющих меру, то для каждого $m=1, 2, \ldots$ определяется оператор

$$H_m f(P)=\sum_{i=-m}^{m}\int_{R^n} f(\sigma_x P)\,K_i(x)\,dx.$$

Доказывается, что при некоторых условиях, наложенных на $K(x)$, $\{H_m f(P)\}$ сходится почти всюду к пределу $Hf(P)$ для всякой $f\in L^p(\Omega,\mu)$ и всякого $p\geqslant 1$.

Если $p>1$, то $\{H_m f\}$ сходится в среднем порядке p к Hf и максимальный оператор $Mf=\sup|H_m f|$ ограничен в $L^p(\Omega,\mu)$.

Если $\Omega=R^n$, $\sigma_x t=x+t$, $K(x)=\omega(x)|x|^{-n}$ для $1\leqslant|x|\leqslant 2$ и нулю для остальных x, то оператор $Hf=\lim H_m f$ является n-мерным гильбертовым преобразованием. Общие результаты автора в этом случае дают классические теоремы Лузина—Риса—Колмогорова, относящиеся к обычным гильбертовым преобразованиям, а также более поздние результаты Зигмунда—Кальдерона, относящиеся к обобщенным n-мерным гильбертовым преобразованиям.

Если Ω — пространство с мерой, $K(x)=-1$ для $|x|<1$, $K(x)=1$ для $1\leqslant|x|\leqslant 2$, то оператор $H_m f$ сводится к эргодическим операторам. Общие результаты автора дают в этом случае эргодические теоремы Нёймана, Биркгофа и Винера.

Построение унифицированной теории основано на общих свойствах операторов в пространствах L^p, изученных ранее автором (РЖМат, 1957, 5712, 7785, 7786).

Построенная теория также распространяется на ядра $K(x)$, определенные на локально компактных абелевых группах. Последнее позволяет, в частности, объединить в одну теорию «дискретную» теорию (эргодические теоремы для дискретных групп $\{\sigma^n\}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$; теория Риса дискретных гильбертовых преобразований последовательностей) и «непрерывную» теорию (эргодические теоремы для непрерывных групп $\{\sigma_t\}$, $-\infty<t<\infty$; обычные гильбертовы преобразования функций).

В заключение автор ставит ряд нерешенных проблем, связанных с операторами Hf и $H_m f$. И. А. Егорова

7788. **Один критерий равностепенной непрерывности функций двух переменных. Гальярдо** (Un criterio di eguale continuità per funzioni di due variabili. Gagliardo Emilio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 148—167 (итал.)

Основной результат: Пусть

$$D\equiv\{y_0\leqslant y\leqslant y_1,\ \varphi(y)\leqslant x\leqslant\psi(y)\}\ (\varphi(y)<\psi(y))$$

— часть плоскости (x, y), и функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ удовлетворяют условию Гёльдера порядка $\lambda>1/3$ при $y_0\leqslant y\leqslant y_1$.

Пусть далее $\{u_n(x, y)\}$ — последовательность функций, непрерывных вместе с производными $\partial u_n/\partial x$, $\partial u_n/\partial y$, $\partial^2 u_n/\partial x^2$ в D, и существуют положительные константы M, α, A такие, что для любого n выполняются неравенства

1) $|u_n(x, y)|\leqslant M$,

$$2)\ \iint_D\left[\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha}+\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right]dxdy\leqslant A\ (0<\alpha\leqslant 1).$$

Тогда функции $u_n(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера (не зависящему от n) и последовательность $\{u_n(x, y)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости в D.

Для частного случая $\alpha=1$ результат верен и для области D, ограниченной простой замкнутой кривой, единичный вектор нормали которой удовлетворяет условию Гёльдера.

Основной результат справедлив при любом $\alpha>0$, если вместо 2) взять

$$3)\ \iint_D\left[\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{\max\left[1+\alpha,\ 1+\frac{1}{\alpha}\right]}+\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha}+\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right]dxdy\leqslant A$$

и считать $\lambda>1/2$.

В конце работы приведены примеры, показывающие, что отдельные предположения теорем нельзя ослабить.

Этот критерий полезен при изучении уравнений в частных производных параболического типа.

О. В. Бесов

7789. **Интеграл Данжуа и интегрирование посредством рангированных пространств. I. Накаиси** (L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I. Nakanishi Shizu), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 9, 678—683 (франц.)

Доказывается, что понятие интеграла Данжуа—Перрона может быть получено методом Куниги (РЖМат, 1957, 2975). Для интегрируемости $f(x)$ в смысле Данжуа—Перрона на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)=\lim f_n(x)$ почти всюду, где $f_n(x)$ удовлетворяют условиям, формулируемым в терминах упомянутой работы Куниги: требуется существование фундаментальной последовательности $\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, обладающей свойством P'. П. И. Романовский

7790. **Теорема о подстановке для интегралов Данжуа. Картак** (Věta o substituci pro Denjoyovy integrály. Karták Karel), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 4, 410—419 (чешск.; рез. русск., нем.)

Выводятся достаточные условия, при которых законна формула замены переменного в интегралах Данжуа—Перрона и Данжуа—Хинчина от функции одного действительного переменного. П. И. Романовский

7791. **Обобщение интеграла Стилтьеса на матричные функции. Белман** (On a generalization of the Stieltjes integral to matrix functions. Bellman Richard), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 2, 181—186 (англ.)

Пусть $x(t)$ — такая матричная функция от t, $0\leqslant t\leqslant 1$, что $x(t_2)-x(t_1)$ неотрицательно определенна, когда $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ точками $\{t_i\}$ так, что $t_{i+1}-t_i=2^{-N}$. Пусть $\lambda_1(t_i), \ldots, \lambda_N(t_i)$ — характеристические числа матрицы $x(t_{i+1})-x(t_i)$, причем $0\leqslant\lambda_N(t_i)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_1(t_i)$.

Теорема. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$. Тогда для каждого k сумма

$$S_N=\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\,\lambda_k(t_i)$$

при $N\to\infty$ стремится к линейному функционалу $\int_0^1 f(t)\,d\lambda_k$. А. Г. Джваршейшвили

7792. **О функциях, непрерывных по каждой переменной. Маркус С.**, Докл. АН СССР, 1957, 112, № 5, 812—814

Дается упрощенное доказательство теоремы Серпинского—Толстова о том, что функция нескольких действительных переменных в области D, непрерывная по каждой переменной в D, вполне определяется своими зна-

чениями на множестве, всюду плотном в D. Доказываются также некоторые сопутствующие теоремы.

П. И. Романовский

7793. Об одном обобщении функций Гамеля. Маркус (Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel. Marcus Solomon), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. et natur., 1956, **20**, № 5, 584—589 (франц.)

Исследуются вещественные немонотонные функции $f(x)$, определенные на (a, b) и обладающие свойством: при $a < x < y < b$

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y))$$

или

$$\min(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f(x), f(y)).$$

Эти функции, введенные в рассмотрение Часаром (Császár A., Fundam. math., 1949, **36**, 72—76), являются обобщением функций Гамеля, т. е. таких разрывных функций $f(x)$, которые удовлетворяют функциональному уравнению $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Доказывается, что класс этих функций существенно шире класса функций Гамеля. Указываются некоторые дескриптивные свойства функций Часара.

Ю. Т. Медведев

7794. Некоторые свойства обобщенных выпуклых функций. У Чжо-цюнь (廣義凸性函數的特性. 伍卓群), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 267—275 (кит.)

Пусть $\{F(x)\}$ — такое семейство непрерывных функций, заданных на (a, b), что для любых двух точек x_1, x_2 из (a, b) и любых двух вещественных чисел y_1, y_2 в семействе найдется одна и только одна функция, принимающая в этих двух точках соответственно значения y_1 и y_2. Непрерывная на (a, b) функция $f(x)$ называется выпуклой снизу относительно $\{F(x)\}$, если для любых x_1 и x_2 из (a, b) имеет место $f(x) \leqslant F_{12}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, где $F_{12}(x)$ — та функция из $\{F(x)\}$, для которой $F_{12}(x_1) = f(x_1)$, $F_{12}(x_2) = f(x_2)$.

В реферируемой работе установлены достаточные условия обобщенной выпуклости функции относительно некоторых семейств. Ши Чжун-цы, Цзэн Кэнь-чэн

7795. О суммируемости ортогональных разложений непрерывных функций. Алянчич (Über Summierbarkeit von Orthogonalentwicklungen stetiger Funktionen. Aljančić S.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, **10**, 121—130 (франц.)

Пусть $\{\lambda_\nu\}$ ($\nu = 0, 1, \ldots$) — последовательность действительных чисел, а $\{\varphi_\nu(x)\}$ — система функций, ортонормированная на $[a, b]$ и замкнутая в пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных на $[a, b]$ функций. Ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu c_\nu \varphi_\nu(x)$, где c_ν — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in C(a, b)$, сходится равномерно для всех функций $f(x)$ из $C(a, b)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b \left| \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(t) \right| dt \leqslant M, \qquad (1)$$

где M — константа. При выполнении условия (1) существует такая подпоследовательность $n_i \to \infty$, что

$$\int_a^t \sum_{\nu=0}^{n_i} \lambda_\nu \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(\tau)\, d\tau \to \overline{K}(t, x) \quad (i \to \infty),$$

где $\overline{K}(t, x)$ есть функция с ограниченным изменением относительно t, и справедливо соотношение

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu c_\nu \varphi_\nu(x) = \int_a^b f(t)\, d_t \overline{K}(t, x)$$

равномерно на $[a, b]$. Для случая, когда функции $\varphi_\nu(x)$ ограничены, $|\varphi_\nu(x)| \leqslant N_\nu$, рассматривается вопрос о суммируемости ряда Фурье посредством бесконечной числовой матрицы $\{\lambda_{\nu, n}\}$ ($\nu, n = 0, 1, \ldots$), и устанавливается следующий критерий:

Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого $n = 0, 1, \ldots$ ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu, n} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

равномерно сходится к некоторой функции $f_n(x)$, а последовательность $f_n(x)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к $f(x)$ тогда и только тогда, когда система $\{\varphi_\nu(x)\}$ замкнута в $C(a, b)$, $\lambda_{\nu, n} \to 1$ при всех ν и $n \to \infty$,

$$\int_a^b \left| \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{\nu, \mu} c_\nu \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(t) \right| dt \leqslant M_\mu,$$

и последовательность

$$\overline{K}_\mu(t; x) = \lim_{n_i^{(\mu)} \to \infty} \int_a^t \sum_{\nu=0}^{n_i^{(\mu)}} \lambda_{\nu, \mu} c_\nu \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(\tau)\, d\tau$$

удовлетворяет условию

$$\int_a^b |d_t \overline{K}_\mu(t; x)| = O(1).$$

Соответствующий результат для случая, когда $\{\varphi_\nu(x)\}$ есть тригонометрическая система, был получен Карамата и Томичем (РЖМат, 1957, 2999).

А. Ф. Тиман

7796. Исследование свойств касательных к кривым бесконечной длины. Безикович (Analysis of tangential properties of curves of infinite length. Besicovitch A. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 1, 69—72 (англ.)

Изучаются элементарные свойства касательных к плоским множествам, в частности дугам, δ-конечной линейной меры. Приводятся примеры.

П. И. Романовский

7797. Лебегова площадь как мера. Чезари (L'area di Lebesgue come una misura. Cesari Lamberto), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 4, 655—673 (итал.)

Рассматривается непрерывное отображение T ограниченной конечносвязной замкнутой жордановой области A плоскости в трехмерное евклидово пространство и проекции (T_r, A), $r = 1, 2, 3$ такого отображения на координатные плоскости,

Пусть $\mathfrak{M}$ означает семейство всех подмножеств A, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ — соответственно семейства открытых, замкнутых и B-множеств из $\mathfrak{M}$. Далее, пусть $\Gamma = \Gamma(A, T)$ — семейство всех максимальных континуумов g из A, для которых T постоянно, $\mathfrak{M}_0$ — семейство всех множеств M, которые можно представить в виде суммы $M = \sum g$, $g \in \Gamma$ и, наконец, $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{B}_0$ — соответственно общие части $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}_0$.

Рассмотрим полигональную область $q \subset A$ с границей q^*, обозначим через $C = (T, q^*)$ образ границы при отображении T и через $C_r = (T_r, q^*)$ — образ границы при отображении T_r ($r = 1, 2, 3$). Для точки $p \in E_{2r}$ через $O(p; C_r)$ обозначается топологический индекс образа C_r относительно точки p. Полагаем

$$v_r = v(q, T_r) = (E_{2r}) \int |O(p; C_r)| \quad (r = 1, 2, 3),$$

$$v(q, T) = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2},$$

$$V = V(A, T) = \sup \sum v(q, T).$$

где верхняя грань берется по системе всех простых замкнутых полигонов в A. $V(A, T)$ называют площадью в смысле Гёце (РЖМат, 1955, 3142). Рассматривая неотрицательные функции

$$O^+(p; C_r) = \frac{1}{2}\,[\,|O(p; C_r)| + O(p; C_r)]$$

и

$$O^-(p; C_r) = \frac{1}{2}\,[\,|O(p; C_r)| - O(p; C_r)],$$

получаем аналогичные функции v_r^+, v_r^-, $V^+(A, T)$, $V^-(A, T)$.

Показывается, что при $V(A, T) < +\infty$ (отображение ограниченной вариации) для почти всех $p \in T_r(A)$ компоненты прообраза $T_r^{-1}(p)$ суть континуумы $g \in \Gamma$. Множество $Z_r \subset E_{2r}$, для которого это не имеет места, есть B-множество меры нуль.

Для множества $M \in \mathfrak{M}$ определяется функция $\psi(M, T) = \inf V(G, T)$, где нижняя грань берется по всем множествам $G \supset M$, $G \in \mathfrak{G}$. Доказывается, что для всех $G \subset \mathfrak{G}$ справедливы равенства $\psi(G, T) = V(G, T) = L(G, T) = P(G, T)$, где L и P означают соответственно площадь в смысле Лебега и Пеано. Далее, если отображение T ограниченной вариации, то для того чтобы T было абсолютно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы функция ψ была аддитивна в $\mathfrak{B}$ и непрерывна относительно меры Лебега.

Для множества $M \in \mathfrak{M}_0$ строится функция $\varphi(M, T) = \inf V(G, T)$, где нижняя грань берется по всем множествам $G \supset M$ и $G \in \mathfrak{G}_0$, которая обладает теми же свойствами, что и $\psi(M, T)$. Если для отображения T_r ($r = 1, 2, 3$) определить аналогичные системы множеств, то можно так же построить функции

$$\varphi_r = \varphi_r(M, T_r),\quad \varphi_r^+ = \varphi_r^+(M, T_r),\quad \varphi_r^- = \varphi_r^-(M, T_r),$$

$$d_r = d(M, T_r) = \varphi^+(M, T_r) - \varphi^-(M, T_r),$$

причем φ^+ и φ^- определяются аналогично φ, исходя из функций V^+ и V^- вместо V.

Для $M \in \mathfrak{M}_0$ положим $\varphi_{*r}(M) \equiv \varphi_*(M, T_r) = \varphi_r(M - K_r)$, где $K_r = T_r^{-1}(Z_r)$.

Аналогично определяется функция d_{*r}. Доказывается, что для непрерывного отображения (T, A) ограниченной вариации вектор-функция

$$d = d(M, T) = (d_{*1}, d_{*2}, d_{*3}),\quad d_{*r} = d_*(M, T_r),$$

$$r = 1, 2, 3,\quad M \in \mathfrak{M}_0$$

вполне аддитивна в $\mathfrak{B}_0$. Р. С. Гутер

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

7798. Новая формулировка принципа индукции. Попадич (Jedna nova formulacija principa indukcije. Popadić Milan S.), Годишен зб. филоз. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1955, 8, № 2, 27—33 (серб.; рез. англ.)

Статья примыкает к предыдущим исследованиям автора о принципе индукции (РЖМат, 1956, 2718).

Понятия «класс» и «множество» употребляются, как в работе Гёделя (русский перевод см. в Усп. матем. наук, 1948, 3, № 1, 96—149). Термин «система» означает «класс». Обозначения, отличные от гёделевских: Λ — пустой класс, $A \setminus B$ — разность, $P(A)$ — класс всех подмножеств множества A, $S_A = S \cap P(A)$; $D_{\breve{\varphi}}(W_{\breve{\varphi}})$ означает класс левых (правых) членов всех элементов отношения φ, т. е. то же, что $W(\varphi)(D(\varphi))$ цитированной работы Гёделя; $D_A\varphi(W_A\varphi)$ означает в терминах этой работы Гёделя $W(F \upharpoonright A)$ $(D(A \upharpoonright F))$; $a, b, \ldots \rho x$ $(x \rho a, b, \ldots)$, где ρ — двоичное отношение, означает, что $a\rho x$, $b\rho x$, ... $(x\rho a, x\rho b, \ldots)$.

Общая схема принципа индукции (предложение 2.1): Пусть M, S, S_1 и N — классы, а φ — бинарное отношение. Из условий: 1) $S_{M \cap N} \cap S_1 \neq \Lambda, \{\Lambda\}$; 2) существует отношение $\psi \in P(\varphi)$ с такой левой областью $D_\psi = S_M \setminus \{\Lambda, M\}$, что $W_{S_{M \cap N} \setminus \{\Lambda, M\}} \psi \subseteq P(M \cap N)$ — вытекает $M \subseteq N$.

Если для классов M, S. S_1 и двоичного отношения φ верно предложение 2.1, то четверка (M, S, S_1, φ) называется индуктивной. При этом S называется индуктивной системой, S_1 — базисом индукции, а φ — индуктором.

Четверка (M, S, S_1, φ) (M, S, S_1 — классы, φ — двоичное отношение) называется потенциальной, если отношение $\sim (W_{S_E \setminus \{\Lambda\}} \psi \subseteq P(E))$ удовлетворяется для любого $\psi \in P(\varphi)$, для которого $D\psi = S_M \setminus \{\Lambda, M\}$, при условии, что $E \subset M \cap \cup X$ и $S_E \cap S_1 \neq \Lambda, \{\Lambda\}$. Система S называется потенциальной, S_1 — базисом индукции, φ — индуктором.

Система классов покрывает класс A, если $A \subseteq \cup X$. S называется покрытием класса A.

Основная теорема: Для того чтобы четверка (M, S, S_1, φ) (где M, S и S_1 — классы, а φ — двоичное отношение) была индуктивной, необходимо и достаточно, чтобы она была потенциальна и чтобы система $W\psi$ покрывала M для всякого $\psi \in P(\varphi)$, для которого $D\psi = S_M \setminus \{\Lambda, M\}$. А. С. Есенин-Вольпин

7799. О симметричных бинарных отношениях. Куреп а (On symmetrical binary relations. Kurepa G.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1954, 2, № 1, 9 (англ.)

Пусть G — множество, ρ — бинарное симметричное отношение в G. Упорядоченная пара $(G; \rho)$ называется графом. Множество $M \subset G$ называется ρ-цепью (ρ-антицепью), если для любого двухточечного подмножества $X = (a, b) \subset M$ имеем $a\rho b$ (a не ρb). Любое одноточечное подмножество G считается и цепью и антицепью графа $(G; \rho)$. Пусть kA — мощность множества A,

$$k_c(G; \rho) = k_c G = \sup kC,$$

$$k_{\bar{c}}(G; \rho) = k_{\bar{c}} G = \sup k\overline{C},$$

где C и $\overline{C}$ пробегают соответственно семейство всех цепей и семейство всех антицепей графа $(G; \rho)$.

Сформулированы две теоремы.

1. Если $kG \geqslant k\omega_0$, то $kG \leqslant 2^g$, где $g = \inf\{k_c G, k_{\bar{c}} G\}$. Для любого алефа $k\omega_\alpha$ и любого кардинального числа $n \leqslant 2^{k\omega_\alpha}$ существует такой граф $(G_n; \rho)$, что $k_c G_n \leqslant k\omega_\alpha$, $k_{\bar{c}} G_n \leqslant k\omega_\alpha$, $kG_n = n$; в частности существует такой граф $(M_\alpha; \rho)$, что $k_c M_\alpha = k\omega_\alpha = k_{\bar{c}} M_\alpha$, $kM_\alpha = 2^{k\omega_\alpha}$.

Следствие. Если для графа $(G; \rho)$ имеем $k_c G \leqslant k\omega_\alpha$, $k_{\bar{c}} G \leqslant k\omega_\alpha$, то $kG \leqslant 2^{k\omega_\alpha}$.

Это следствие дает решение проблемы Кнастера—Серпинского (Sierpinski W., Ann. Scuola norm. sup., Sci. mat., fis., Pisa, 1933, 2, 285).

2. Пусть S — непустое множество и $1 < n < \omega_0$; S_n — семейство всех $X \subset S$, для которых $kX = n$; M — конечное множество и f — равномерное отображение S_n в M. Если $kS > 2^b$, где b — трансфинитное кардинальное число, то существует такое подмножество $S_0 \subset S$, что $kS_0 \geqslant b$ и f постоянно в S_0.

Доказательства не приводятся. И. Н. Врублевская

7800. Погружения частично упорядоченных множеств в направленные множества с сохранением пределов. Исбелл, Рубин (Limit-preserving embeddings of partially ordered sets in directed sets. Isbell J. R., Rubin Herman), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 812—813 (англ.)

Говорят, что функция f, заданная на частично упорядоченном множестве $(A, >)$, является «решающей для множества чисел S» (decides for S), если, каково бы ни было $\gamma \in A$, существует такое $\beta \geqslant \gamma$, что $f(\alpha) \in S$ при всех $\alpha \geqslant \beta$.

Теорема. Каждое частично упорядоченное множество A может быть погружено с сохранением порядка в направленное множество B таким образом, что «естественное» распространение функции f на B является решающим для тех и только тех множеств S, что и функция f на A. Б. З. Вулих

7801. О взаимоотношении между дескриптивной измеримостью, абсолютной измеримостью и свойством Бэра. Гладкий А. В., Матем. сб., 1957, **41**, № 1, 3—6

Понятия разреженного класса и дескриптивной измеримости введены А. А. Ляпуновым (Матем. сб., 1949, 24, 1—119; РЖМат, 1954, 1598). Из определения этих понятий следует, что всякое дескриптивно измеримое множество обладает свойством Бэра и абсолютно измеримо.

Автор показал, что из континуум-гипотезы следует существование в бэровском пространстве множества, обладающего свойством Бэра и абсолютно измеримого, но не являющегося дескриптивно измеримым.

З. И. Козлова

7802. Заметка о некоторых плоских множествах точек. Сен-Гупта, Басу-Мазумдар (A note on certain plane sets of points. Sen Gupta H. M., Basu Mazumdar N. C.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, № 4, 199—201 (англ.)

Построено плоское множество первой категории и меры нуль, лежащее в единичном квадрате и имеющее непустое пересечение с каждой прямой $y = mx + c$, $m \neq 0$, пересекающей единичный квадрат. Оно представлено в виде суммы $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где каждое множество E_n совершенно и нигде не плотно и множество расстояний между его точками есть отрезок $[0, \sqrt{2}]$.

Б. С. Содномов

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

7803. О локальном наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами. Бари Н. К., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 107—138

Пусть $f(x)$ — периодическая периода 2π функция, которая на данном отрезке $[a, b]$ принадлежит классу $L_p(a, b)$ $(p \geqslant 1)$. Для всякого отрезка $[a', b']$, целиком лежащего внутри $[a, b]$, при достаточно малых δ, вводятся в рассмотрение модуль гладкости

$$\omega_k^{(p)}(\delta, f, a', b') = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{ \int_{a'}^{b'} |\Delta_k(h, f, a', b')|^p \, dx \right\}^{1/p} \qquad (1)$$

и наилучшее приближение тригонометрическими полиномами

$$E_n^{(p)}(f, a', b') = \inf_{T_n} \left\{ \int_{a'}^{b'} |f(x) - T_n(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \qquad (2)$$

Доказываются четыре теоремы, устанавливающие зависимость между модулями гладкости (1) и наилучшими приближениями (2).

Для неубывающих непрерывных функций $\varphi(\delta)$, обладающих свойствами: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\delta) > 0$, если $\delta > 0$, и при некотором $C > 1$

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}} \varphi(C\delta)/\varphi(\delta) < C^k,$$

устанавливается эквивалентность соотношений порядка

$$\omega_k^{(p)}(\delta, f, a', b') = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad E_n(f, a', b') = O[\varphi(n^{-1})],$$

а также эквивалентность соотношений точного порядка

$$\omega_k^{(p)}(\delta, f, a', b') \asymp \varphi(\delta) \quad \text{и} \quad E_n(f, a', b') \asymp \varphi(n^{-1})$$

для любого отрезка $[a', b']$, целиком лежащего внутри $[a, b]$.

Аналогичные две теоремы при дополнительном условии имеют место для производных. Дано приложение полученных автором результатов к исследованию сходимости ряда Фурье почти всюду на некотором отрезке, а также к изучению свойств сопряженных функций, частных сумм и средних арифметических частных сумм их рядов Фурье.

При доказательстве основных предложений устанавливается ряд лемм, представляющих также и самостоятельный интерес.

Применительно к тому случаю, когда $[a, b] \equiv [0, 2\pi]$, теорема 1 была ранее получена М. Ф. Тиманом и референтом (Докл. АН СССР, 1950, **71**, 17—20), теорема 2 — С. Б. Стечкиным (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, № 3, 219—242), теорема 3 — референтом (Исследования по теории приближения функций. Диссертация. Харьков, 1951, стр. 183—186), теоремы 5—7 — С. М. Лозинским (Докл. АН СССР, 1952, 83, № 5, 646—647).

А. Ф. Тиман

7804. О порядке чезаровских средних ряда, сопряженного к ряду Фурье. Кумари (On the order of the Cesàro means of a series conjugate to Fourier series. Kumari Sulaxana), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, **48**, № 3, 139—151 (англ.)

Пусть

$$\sum_1^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum B_n(x) \qquad (1)$$

— ряд, сопряженный к ряду Фурье периодической функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$.

Положим

$$\theta_0(t) = \{f(x + t) - f(x - t) - 2l\}/2,$$

$$\theta_\alpha(t) = \alpha t^{-\alpha} \int_0^t (t - u)^{\alpha-1} \theta_0(u) \, du \quad (\alpha > 0).$$

Доказывается, что при выполнении условия

$$\int_t^{\pi} t^{-1} |\theta_\alpha(t)| \, dt = o[(\log t^{-1})^{p+1}] \quad (\alpha \geqslant 0, -1 < p < \infty)$$

в точке x (C, α)-средние ряда (1) при $-1 < p \leqslant 0$ будут иметь порядок $\frac{2l}{\pi} \log n$, а при $p > 0$ эти средние будут равны $o[(\log n)^{p+1}]$; при том же условии $(C, \alpha + 1)$-средние последовательности $\{nB_n(x)\}$ будут равны $o[(\log n)^{p+1}]$. Приводятся примеры, показываю-

щие, что в этом результате нельзя ни ослабить условие, ни улучшить оценки.

Аналогичный результат приводится для рядов, полученных почленным дифференцированием ряда (1).

В качестве следствий даются достаточные условия (R, λ, k)-суммируемости ряда (1) и продифференцированных рядов для некоторых функций λ.

А. А. Шнейдер

7805. **Замечание к одному процессу суммирования рядов Фурье. Томич** (Primedba o jednom postupku zbirljivosti Fourier-ovih redova. Томић М.), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1955, 6, 35—43 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная периода 2π функция, $s_n(f; x)$ — частная сумма порядка n ее ряда Фурье, $\{\alpha_n\}$ $(|\alpha_n| \leqslant \pi)$ — произвольная числовая последовательность и $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. Рассматривая полиномы

$$U_n(f; x; \alpha_n) = \frac{1}{2}\{s_n(f; x+\alpha_n) + s_n(f; x-\alpha_n)\}$$

и развивая результат референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, 14, 85—94, теорема 1), автор доказывает, что условие

$$\alpha_n = \frac{k(n)\pi}{2n+1} + o\left[\frac{1}{n \ln n\, \omega(1/n)}\right], \qquad (1)$$

где $k(n)$ — целочисленная функция, принимающая конечное число нечетных значений, достаточно для того, чтобы $U_n(f; x; \alpha_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно относительно x, какова бы ни была функция $f(x)$, имеющая модуль непрерывности $\omega(f; t) = \omega(t)$.

В работе приведено исправленное доказательство теоремы 4 из предыдущей статьи автора (РЖМат, 1957, 2998).

Примечание референта. Приведенное в статье доказательство достаточности условия (1) содержит ошибку. Оно опирается на соотношение $\alpha_n = O(n^{-1})$ (стр. 37, неравенства (5) и (6)), которое для некоторых модулей непрерывности $\omega(t)$ может не выполняться. Однако при $\alpha_n \to 0$ утверждение автора верно даже в несколько более общей формулировке, непосредственно вытекающей из следующего неравенства (Тиман А. Ф., Исследования по теории приближения функций. Диссертация, Харьков, 1951, стр. 111):

$$|f(x) - U_n(f; x; \alpha_n)| \leqslant [1 + L_n(\alpha_n)]\, E_n(f) + \frac{1}{2}\omega_2(f; |\alpha_n|),$$

где $L_n(\alpha_n)$ — константа Лебега для сумм $U_n(f; x; \alpha_n)$,

$$\omega_2(f; |\alpha_n|) = \sup_{|t| \leqslant |\alpha_n|} |f(x+\alpha_n) - 2f(x) + f(x-\alpha_n)|$$

— соответствующий модуль гладкости, а $E_n(f)$ — наилучшее тригонометрическое приближение порядка n функции $f(x)$.

А. Ф. Тиман

7806. **О суммировании ряда Фурье непрерывной функции с данным модулем непрерывности. Томич** (Sur la sommation de la série de Fourier d'une fonction continue avec le module de continuité donné. Томић М.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, 10, 19—36 (франц.)

Если бесконечная треугольная матрица чисел $\lambda_{k,n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1;\ \lambda_{0,n} = 1,\ \lambda_{n+1,n} = 0)$ обладает тем свойством, что при любом фиксированном k $\lim_{n\to\infty} \lambda_{k,n} = 1$ и

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^\pi \left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} \cos kt\right| dt = o(1), \qquad (1)$$

где $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности, то какой бы ни была непрерывная функция $f(x)$ с модулем непрерывности $\omega(f; t) = \omega(t)$ и с рядом Фурье

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

последовательность полиномов

$$U_n(f; x; \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

при $n \to \infty$ равномерно стремится к $f(x)$. Условие (1) можно заменить условием

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\,|\Delta^2\lambda_{n,k}| = o(1).$$

Если $\lambda_{k,n} = O(1)$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_{k,n} = 1$ и

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_{k,n}| = O(1),$$

то для выполнения соотношения $U_n(f; x; \lambda) \to f(x)$ при $n \to \infty$ на всем классе функций с данным модулем непрерывности достаточно предположить, что

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_{n,n}\ln n = o(1).$$

Устанавливается еще одна теорема того же типа для случая, когда строки матрицы $\{\lambda_{k,n}\}$ удовлетворяют условиям монотонности и выпуклости.

Если бесконечная последовательность чисел λ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ такова, что

$$\sum_{\nu=0}^\infty (\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu| < \infty,$$

то для всякой функции $f(x)$, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию $\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)\lambda_n \ln n = o(1)$, ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

сходится равномерно.

Кроме того, доказана еще одна теорема, дающая достаточный признак равномерной сходимости ряда Фурье.

Работа представляет собой продолжение предыдущей статьи автора (РЖМат, 1957, 2998) и содержит доказательства теорем 3 и 4 этой статьи (см. примечание референта в РЖМат, 1957, 2998).

А. Ф. Тиман

7807. **Константы Лебега для (R, λ, k)-суммирования. Мацумото** (Lebesgue's constant of (R, λ, k) summation. Matsumoto Kishi), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 9, 658—661 (англ.)

Доказывается, что константы Лебега (относительно тригонометрической системы) для $(R, \lambda(w), k)$-суммирования $(k > 0)$ имеют порядок $4\pi^{-2}\log\{\mu'(w)\,w\}$, если функция $\lambda(w) = \exp\mu(w)$ удовлетворяет следующим условиям: $\mu(w)$ возрастает на интервале $(0, \infty)$,

$\mu'(w)$ убывает на (A, ∞), $\lambda'(w)$ возрастает на (A, ∞), и при $w \to \infty$ имеем $\mu(w) \to \infty$, $\mu'(w) \to 0$, $w\mu'(w) \to \infty$ (A — некоторая постоянная). А. А. Шнейдер

7808. K-метод суммирования и сингулярные интегралы. Цзян Цзэ-цзянь (*K* 求和法與奇異積分. 江澤堅), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 1, 171—174 (кит.)

Пусть функция $K_n(t, x)$ определена в квадрате $a \leqslant t \leqslant b$, $a < x < b$. Она называется ядром, если $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta K_n(t, x)\, dt = 1$ при $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$. Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть (a_{ik}) — матрица Тёплица и при всяком i последовательность a_{ik} $(k = 0, 1, \ldots,)$ монотонно стремится к нулю, то для того чтобы $K_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_k(\theta)$ ($D_k(\theta)$ — ядро Дирихле) была ядром и для любой функции $f(\theta) \in L$ имело место $f(\theta) K_n(\theta) \in L$, необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_{nk}| < \infty \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

2. Пусть матрица (a_{ik}) удовлетворяет условиям:

1) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$,

2) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$,

4) $K_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_k(\theta) \in L(0, \pi)$,

5) существуют $M_{n\mu}$, которые стремятся к нулю при $n \to \infty$, $\mu \to \infty$ и для которых

$$\sum_{k=\mu}^{\infty} \frac{1}{k} |a_{nk}| \leqslant M_{n\mu} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $K_n(\theta)$ является ядром.

Построен пример, показывающий, что здесь накладываемые на матрицу условия несколько слабее условий Тёплица. Сунь Юн-шен

7809. Приближение функций с суммируемой p-й степенью при помощи сингулярных интегралов с ядром типа Фейера. Лю Лун-фу (論用 Fejer 型核的奇異積分近迫 p 幕可求和函數. 劉隆復), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 259—261 (кит.)

Для функций $f(t) \in L_p$ $(p \geqslant 1)$ рассматриваются сингулярные интегралы с ядром типа Фейера

$$f_n(x) = n \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, K[n(t - x)]\, dt,$$

где $K(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $K(t) \in L_q$ $(1/p + 1/q = 1)$, причем функция $K(t)$ — четная и положительная;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, dt = 1$;

3) $\delta_n = n \int_0^{\infty} tK(nt)\, dt = o(1)$.

Дается оценка приближения в пространстве L_p $(p \geqslant 1)$ через модуль непрерывности:

$$\| f_n(x) - f(x) \|_{L_p} \leqslant 3\omega_p(\delta_n),$$

Ши Чжун-цы, Цзэн Кэнь-чэн

7810. Приближение функций сингулярным интегралам типа Арнольда. Сюй Лин-чжи (論 Арнольд 型的奇異積分對某些類函數的最佳逼近. 徐利治), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 4, 695—702 (кит.)

Пусть $\varphi(x, t)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям: 1) $|\varphi(x, t)| < \varphi(x, x)$ при $t \neq x$, 2) для всякого x $(a < x < b)$ существует такое $\lambda = \lambda_x > 0$, что

$$\lim_{t\to x} |\varphi(x, t) - \varphi(x, x)| / |t - x|^{\lambda} = k_x > 0.$$

Положим

$$P_n[f, x] = \frac{1}{K_n} \int_a^b [\varphi(x, t)]^n f(t)\, dt,$$

где $K_n = \int_a^b [\varphi(x, t)]^n\, dt$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Если $f(t) \in C^1$ и $f(x) \neq 0$, то

$$\Delta_n \equiv P_n[f, x] - f(x) = o\left(n^{-1/\lambda}\right).$$

Здесь $o\left(n^{-1/\lambda}\right)$ нельзя заменить на $O\left(n^{-(1/\lambda+\varepsilon)}\right)$, где $\varepsilon > 0$ — любое положительное число. Точнее, для любого $\varepsilon > 0$ всегда существует такая $f(t) \in C^1$, что $\Delta_n \sim n^{-1/\lambda-\varepsilon}$.

2. Если $f(t) \in C$ и $f(x) \neq 0$, то $|\Delta_n| \leqslant A\omega\left(n^{-1/\lambda}\right)$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, а A не зависит от f. Для любого $\delta > 0$ существует такое $N(\delta)$, что при $n \geqslant N(\delta)$ можно положить

$$A = 1 + \frac{\Gamma(2/\lambda)}{\Gamma(1/\lambda)} k^{-1/\lambda} + \delta.$$

Следствие. Если существует $\varphi''_{tt}(x, t)$ и при $t \neq x$ имеем $|\varphi(x, t)| < \varphi(x, x) = 1$, то для любой $f(t) \in C$ при $f(x) \neq 0$ будет $|\Delta_n| \leqslant A\omega\left(n^{-1/2}\right)$, где A — абсолютная константа. Для $\delta > 0$ существует такое $N(\delta)$, что при $n \geqslant N(\delta)$ можно взять

$$A = 1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''_{tt}(x, x)|}} + \delta.$$

3. Для любых чисел $c > 0$ и $A \neq 0$ всегда существует такая функция $f(t) \in C$, что $\Delta_n \sim An^{-c}$ $(n \to \infty)$.

4. Для функции $f(t) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ имеет место

$$|\Delta_n| \leqslant An^{-\alpha/\lambda},$$

где A зависит только от λ, k и M. Для любого числа $\rho > 1$ существует такое $N(\rho) > 0$, что при $n > N(\rho)$ можно взять

$$A = \rho M \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\lambda}\right)}{\Gamma(1/\lambda)} k^{-\alpha/\lambda}.$$

5. Для класса функций $\mathrm{Lip}_1 \alpha$ имеем

$$\Delta_n^*(\alpha) = \sup_f \{\max_x |P_n[f, x] - f(x)|\} =$$

$$= \left(\frac{1}{kn}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} + o\left(n^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\right) \quad (n \to \infty).$$

В частности, если существует $\varphi''_{tt}(x,t)$ и $|\varphi(x,t)|$ достигает максимума при $t=x:|\varphi(x,x)|=1$, то для $\mathrm{Lip}_1\alpha$ имеем

$$\Delta_n^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{-2}{n\varphi''_{tt}(x,x)}\right)^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)+o\left(n^{-\alpha/2}\right).$$

Отмечается, что если в качестве $\varphi(x,t)$ взять ядро Валле-Пуссена, то получим некоторые результаты И. П. Натансона.

Примечание референта. Полученная в теореме 5 оценка, вообще говоря, зависит от x, поэтому было бы целесообразнее определить

$$\Delta_n^*(\alpha)=\sup_f|P_n[f,x]-f(x)|.$$

В случае, когда для функции $\varphi(x,t)$ λ не зависит от x, получится равномерная оценка. Сунь Юн-шен

См. также: 7816, 7889, 7988, 7989, 8109, 8033, 8036, 8046

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7811. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Понтрягин (On the zeros of some elementary transcendental functions. Pontryagin L. S.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, № 1, 95—110 (англ.)

Перевод из Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, 6, 115—134.

7812. О сильной форме теоремы Коши относительно интеграла от функции комплексного переменного. Делаж (Sur la forme forte du théorème de Cauchy relatif à l'intégrale d'une fonction de variable complexe. Delange Hubert), Bull. sci. math., 1956, 80, sept.-oct. 156—160 (франц.)

«Сильной формой теоремы Коши» автор называет следующий результат: пусть C — замкнутая жорданова спрямляемая кривая и $f(z)$ — функция, голоморфная внутри области G, ограниченной C, и непрерывная в замкнутой области G, тогда $\int_C f(z)\,dz=0$.

В отличие от этого обычная форма теоремы Коши, когда заранее предполагается аналитичность $f(z)$ в $\bar{G}$ называется автором «слабой». В заметке показывается, что сильная форма теоремы Коши может быть выведена при помощи довольно простых рассуждений из слабой формы той же теоремы, опираясь при этом лишь на формулу Пуассона для представления аналитической внутри круга функции, непрерывной в замкнутом круге, и на теорему о граничных свойствах конформного отображения круга на жорданову область. Г. Ц. Тумаркин

7813. Об одном свойстве комплексных степенных рядов. Моппеpт (On a property of complex power series. Moppert K. F.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 2, 88—89 (англ.)

Рассматривается гильбертово пространство H, состоящее из комплекснозначных в круге $|z|\leqslant 1$ функций $f(z)$, для которых $\iint_{|z|<1}|f(z)|^2\,dxdy<\infty$. Отмечается хорошо известный результат о том, что разложение аналитической в $|z|\leqslant 1$ функции $f(z)$ в ряд Фурье по ортонормальной системе $\left\{\sqrt{\frac{\nu+1}{\pi}}\,z^\nu\right\}$ ($\nu=0,1,2,\ldots$) совпадает с разложением этой функции в ряд Тейлора. Г. Ц. Тумаркин

7814. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов. Джрбашян М. М., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1957, 10, № 1, 21—29 (рез. арм.)

Для данного ограниченного замкнутого континуума K строится система рациональных функций $\{M_n(z)\}$ с заданным множеством полюсов $\{\omega_k\}$. Построенная система функций является естественным обобщением системы полиномов Фабера. Указываются условия, при выполнении которых любая аналитическая внутри области D и непрерывная в $\bar{D}$ функция, может быть разложена в ряд вида $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nM_n(z)$, равномерно сходящийся внутри области D. Относительно односвязной области D, ограниченной жордановой спрямляемой кривой L, при этом предполагается, что при конформном отображении $z=\Psi(w)$, $\Psi(\infty)=\infty$, $\Psi'(\infty)>0$ области $|w|>1$ на внешность кривой L $\lim_{r\to1+0}\int_0^{2\pi}|\Psi'(re^{i\theta})|^2\,d\theta<\infty$, а от последовательности $\{\omega_n\}$, $n=0,1,2,\ldots$, точек, лежащих вне $\bar{D}$, являющихся полюсами $M_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, требуется выполнения лишь условия $\sum_{n=0}^{\infty}(|\Phi(\omega_n)|-1)=+\infty$, где $w=\Phi(z)$ — функция, обратная к $z=\Psi(w)$. В этом случае $K=\bar{D}$) для $M_n(z)$ имеет место следующее интегральное представление:

$$M_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{M_n(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_n[\Phi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

где

$$\varphi_n[\Phi(z)]=\frac{(|\Phi(\omega_n)|^2-1)^{1/2}}{\Phi(\omega_n)-\Phi(z)}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-\overline{\Phi(\omega_k)}\,\Phi(z)}{\Phi(z)-\Phi(\omega_k)},\quad n\geqslant 1$$

($M_n(z)$ — главная часть функции $\varphi_n[\Phi(z)]$ и имеет поэтому вид $M_n(z)=\frac{P_n(z)}{\prod_{k=0}^{n}(z-\omega_k)}$; здесь $P_n(z)$ — некоторый полином степени n). Коэффициенты a_n в разложении $f(z)$ в ряд по системе $\{M_n(z)\}$ подсчитываются по формулам

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\zeta)\,\psi_n[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)\,d\zeta,$$

где

$$\psi_n(w)=\frac{(|\Phi(\omega_n)|^2-1)^{1/2}}{1-\Phi(\omega_n)\,w}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{w-\Phi(\omega_k)}{1-\Phi(\omega_k)\,w}$$

$(n=0,1,2,\ldots)$.

Г. Ц. Тумаркин

7815. Об универсальных рядах и последовательностях. Селезнев А. И., Тр. Горьковск. инж.-строит. ин-та, 1956, вып. 25, 281—299

Пусть $D_1, D_2, D_3,\ldots$ — последовательность замкнутых однолистных областей, имеющих своим пределом риманову поверхность S, подобную однолистной (см., например, Курант Р., Геометрическая теория

функций комплексного переменного, М.—Л., 1934) и $\zeta = V_n(z)$ — функция, взаимно однозначно и конформно отображающая D_n на замкнутую однолистную область D_n^* плоскости униформизирующей переменной ζ. Рассматривая последовательность функций $\varphi_m[V_n(z)]$, где

$$\varphi_m(\zeta) = \frac{a_0\zeta^\nu + a_1\zeta^{\nu-1} + \ldots + a_\nu}{b_0\zeta^\mu + b_1\zeta^{\mu-1} + \ldots + b_\mu}$$

— рациональные дроби с рациональными коэффициентами, автор доказывает, что для любой расположенной над расширенной плоскостью комплексного переменного z римановой поверхности, которая подобна однолистным, можно выбрать области D_n так, чтобы какой бы ни была мероморфная на данной поверхности функция f, у этой последовательности существовала подпоследовательность, имеющая в каждой точке S своим конечным или бесконечным пределом значение функции f и равномерно сходящаяся к f на любом замкнутом компактном множестве точек из S, не содержащем ее иррациональных точек разветвления и полюсов.

Устанавливаются также некоторые другие предложения, характеризующие «универсальный» характер указанной последовательности мероморфных функций.

Кроме того, в работе дано опирающееся на прежние результаты автора (Матем. сб., 1951, 28 (70), № 2, 453—460) обобщение теорем Д. Е. Меньшова об универсальных тригонометрических рядах на случай комплексных функций. А. Ф. Тиман

7816. Многочлены наилучшего приближения данной степени. Уолш (Best-approximation polynomials of given degree. Walsh J. L.), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York—Toronto—London, 1956, 213—218 (англ.)

Краткий обзор работ, посвященных исследованию свойств полиномов данной степени, наименее уклоняющихся от данной функции на множестве вещественных или комплексных точек. Относящиеся к этому вопросу результаты А. Н. Колмогорова (Успехи матем. наук, 1948, 3, вып. 1, 216—221) и Е. Я. Ремеза (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 6, 965—968) не приводятся.

В. С. Виденский

7817. Об обобщенных чебышевских многочленах. Уолш, Зедек (On generalized Tchebycheff polynomials. Walsh Joseph L., Zedek Mishael), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 2, 99—104 (англ.)

Даны целые числа n и s, $0 \leqslant s < n$, и множество E, замкнутое и содержащее $\geqslant n-s+1$ комплексных точек. Многочлен

$$I_n^s(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_s z^{n-s} + a_{s+1} z^{n-s-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

с фиксированными комплексными коэффициентами $A_1, \ldots, A_s$ называется (n, s)-инфра-многочленом на E, если не существует никакого многочлена

$$p_n^s(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_s z^{n-s} + c_{s+1} z^{n-s} + \ldots + c_n \qquad (2)$$

с такими же $s+1$ старшими коэффициентами, который бы удовлетворял на E неравенству $|p_n^s(z)| < |I_n^s(z)|$, за исключением, быть может, общих нулей, где $p_n^s(z) = I_n^s(z)$. По известной теореме Фейера все нули многочлена $I_n^0(z)$ лежат в выпуклой оболочке множества E. Этот результат следующим образом обобщается для многочленов $I_n^s(z)$.

Теорема 1. Пусть $z_0^*, z_1^*, \ldots, z_s^*$ — произвольные $s+1$ нулей многочлена $I_n^s(z)$ и пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — углы, под которыми видно множество E из этих нулей, тогда

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_s \geqslant \pi. \qquad (3)$$

Далее устанавливается следующее предложение:

Если (n, s)-инфра-многочлен $I_n^s(z)$ нигде не обращается в нуль на множестве E, состоящем не менее чем из $n-s+2$ точек, то на E существуют такие $m+1$ точек $z_0, z_1, \ldots, z_m$, где $n-s \leqslant m \leqslant 2(n-s)$, и $m+1$ положительных постоянных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\sum_{\mu=0}^m \lambda_\mu = 1$, таких, что

$$\sum_{\mu=0}^m \lambda_\mu \frac{z_\mu^k}{I_n^s(z_\mu)} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-s-1), \qquad (4)$$

причем $I_n^s(z)$ будет также инфра-многочленом на подмножестве $e = \{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$.

Теорема 2. Пусть выполняются те же предположения о $I_n^s(z)$ и E, что и при выводе (4) и пусть $p_s(z)$ — произвольный многочлен степени s, являющийся делителем многочлена $I_n^s(z)$. Тогда справедливо равенство

$$I_n^s(z) = \frac{p_s(z)\,\Lambda(z)}{M(z)}, \qquad (5)$$

где

$$M(z) = \sum_{\mu=0}^m \frac{\lambda_\mu z_\mu^\gamma}{I_n^s(z_\mu)} \frac{g(z)}{z - z_\mu},$$

$$\Lambda(z) = \sum_{\mu=0}^m \frac{\lambda_\mu z_\mu^\gamma}{p_s(z_\mu)} \frac{g(z)}{z - z_\mu}, \qquad (6)$$

$$g(z) = \prod_{\mu=0}^m (z - z_\mu),$$

γ — целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant \gamma \leqslant s$. Равенство (5) обобщает результат Фекете (Fekete M., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, 37, № 2, 95—103) относительно многочлена $I_n^0(z)$.

Примечание референта. Нетрудно убедиться, что фигурирующая в (6) величина γ всегда равна нулю. Пусть α_0 — наименьший из показателей $\alpha = n-s, \ldots, n$, для которого сумма

$$\sum_{\mu=0}^m \frac{\lambda_\mu z_\mu^\alpha}{I_n^s(z_\mu)}$$

не обращается в нуль. Многочлен степени $\leqslant m-1$

$$N(z) = \sum_{\mu=0}^m \frac{\lambda_\mu z_\mu^{\alpha_0}}{I_n^s(z_\mu)} \frac{g(z)}{z - z_\mu},$$

благодаря (4), может быть записан в виде

$$N(z) = \sum_{\mu=0}^m \frac{\lambda_\mu z_\mu^{\alpha_0}}{I_n^s(z_\mu)} \frac{g(z)}{z - z_\mu} \left(\frac{z_\mu}{z}\right)^{\alpha_0}.$$

откуда вытекает, что $z^{\gamma_0}N(z)$ — многочлен степени $\leqslant m-1$. Следовательно, $\alpha_0 \leqslant m-1$. Но, так как величина γ определялась выражением $\gamma=\alpha_0-\min(\alpha_0,m)$, то $\gamma=0$. В. С. Виденский

7818. О структуре многочленов наименьшего уклонения. Фекете (On the structure of polynomials of least deviation. Fekete Michael), Bull. Res. Council Israel, 1955, A5, № 1, 11—19 (англ.)

S — компактное множество z-плоскости, $f(z)$ — функция, непрерывная на S. Многочлен $P^*(z)=p_0z^n+\ldots+p_n$ называется ближайшим к $f(z)$ на S, если не существует многочлена $Q(z)=q_0z^n+\ldots+q_n\not\equiv f(z)$, удовлетворяющего неравенству $|f(z)-Q(z)|<|f(z)-P^*(z)|$ при всех $z\in S$, за исключением общих нулей функций $f(z)-Q(z)$ и $f(z)-P^*(z)$.

Теорема 1. Пусть компактное множество S состоит из $\geqslant n+3$ точек и пусть функция $f(z)$ ограничена на S и, кроме того, непрерывна на нем, когда S — бесконечное множество. Если многочлен $P^*(z)=p_0z^n+\ldots+p_n$ является ближайшим к $f(z)$ на S, причем $P^*(z)\neq f(z)$ ни при каком $z\in S$, то в S существует $m+1$ точек $z_0, z_1, \ldots, z_m$ $(n+1\leqslant m\leqslant 2n+2)$ и $m+1$ положительных постоянных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $\left(\sum_{\mu=0}^{m}\lambda_\mu=1\right)$ таких, что

$$\sum_{\mu=0}^{m}\lambda_\mu\frac{z_\mu^\nu}{f(z_\mu)-P^*(z_\mu)}=0\ (\nu=0,1,\ldots,n); \qquad (1)$$

многочлен $P^*(z)$ является ближайшим к $f(z)$ также на подмножестве $s=\{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$.

Следует заметить, что эта теорема является частным случаем теоремы Е. Я. Ремеза (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 6), работа которого не упомянута.

Приведен пример, сообщенный автору Мотцкиным, когда вследствие невыполнения условия $f(z)\neq P^*(z)$ при $z\in S$ нельзя указать никакого конечного множества точек s, на котором бы этот многочлен $P^*(z)$ оставался ближайшим к $f(z)$.

Обозначая через $L(z)$ интерполяционный многочлен Лагранжа степени $\leqslant m$, совпадающий с $f(z)$ на s, и рассматривая алгебраическое уравнение

$$L(z)-P^*(z)=0 \qquad (2)$$

точной степени $n+k$ $(k\geqslant 1)$, автор следующим образом обобщает теорему Уолша и Зедека (реф. 7817).

Теорема 2. Множество точек $s=\{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ видно под углом $\geqslant \pi/k$ из более чем из n корней уравнения (2). В. С. Виденский

7819. Об одном семействе аналитических функций. Опяль (Sur une famille de fonctions analytiques. Opial Z.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 312—318 (франц.)

Через C обозначается класс аналитических в единичном круге K функций $f(z)$, для которых (1) $\iint_K\ln^+|f(z)|\,d\sigma<\infty$ ($d\sigma$ — элемент площади), а через $C(M)$ — подкласс C, состоящий из функций, для которых интеграл (1) $\leqslant M$. Показывается, что если $a_1, a_2, \ldots$ — нули, функции $f(z)\in C$, выписанные с учетом их кратностей, то $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)^2<\infty$. Далее устанавливается нормальность семейства $C(M)$ внутри $|z|<1$. Из этих предложений рассуждениями, обычно применяемыми в подобных вопросах, выводится теорема, аналогичная теореме Бляшке: если последовательность $\{f_n(z)\}$ функций из $C(M)$ сходится на множестве точек $a_1, a_2, \ldots$, такой, что $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|)^2=\infty$, то $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $|z|<1$.

Примечание референта. 1) М. М. Джрбашяном (Сообщ. Ин-та матем. и механ. АН АрмССР, 1948, вып. 2) были изучены различные классы функций, в том числе и классы $A(\alpha)$ аналитических в K функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|\,\rho\,d\rho\,d\theta<\infty,\ \alpha>-1,$$

о чем, по-видимому, не было известно автору. 2) Нормальность семейства $C(M)$ немедленно следует из неравенства

$$\ln^+|f(z_0)|\leq\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\ln^+|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\,\rho\,d\rho\,d\theta\leqslant\frac{M}{\pi r^2}$$

$$(|z_0|+r<1),$$

записанного в силу субгармоничности $\ln^+|f(z)|$.

Г. Ц. Тумаркин

7820. Экспериментально-аналитический метод расчета магнитного поля в воздушном промежутке электрических машин постоянного тока. Синельников Е. М., Тозони О. В., Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1956, 43/57, 7—28

Показывается, что практически важная задача о магнитном поле в воздушном промежутке электрических машин постоянного тока приводится к восстановлению соответствия контурных точек при отображении одной области на другую. Последняя задача решается методом по существу, совпадающим с методом, указанным референтом (РЖМат, 1957, 1326). Приводятся расчетные формулы для основных величин, характеризующих магнитное поле. Г. Н. Положий

7821. Метод последовательных конформных отображений и его приложения к задачам фильтрации. III. Случай близкого расположения шпунтов. Плановая фильтрация. Фильтрация в анизотропном грунте. Фильчаков П. Ф., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 299—318. Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 350). Для приближенного решения фильтрационных задач используется функция, отображающая полуплоскость с наклонным разрезом на полуплоскость. К этому же отображению приводится задача о фильтрации при наклонном направлении анизотропных слоев в случае одношпунтовой плотины. Приведено достаточно много числовых примеров и вычислительных схем. Г. Н. Положий

7822. Обоснование экспериментально-аналитического метода решения задачи Дирихле для односвязной и двусвязной областей. Тозони О. В., Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1956, 43/57, 45—64

Решение задачи Дирихле для заданной области сводится к определению контурных значений и модуля производной функции, дающей отображение данной области на каноническую область. Последняя задача решается методом моделирования, совпадающим с методом, предложенным референтом (РЖМат, 1956, 8745).

Примечание референта. С точки зрения устранения излишних и случайных погрешностей метод решения задачи Дирихле, предлагаемый автором, представляется нам менее надежным по сравнению с непосредственным моделированием этой задачи

Г. Н. Положий

7823. Конформное отображение и риманова поверхность Жизен (Représentation conforme et surface de Riemann. Gysen E.), Bull. Assoc. ingrs. issus École applic. artill. et génie, 1956, 34, № 4, 27—39 (франц.)

Начало статьи см. РЖМат, 1957, 3926. После приведения первоначальных сведений об эллиптических функциях рассмотрены свойства отображения, осуществляемого функцией $w(z)=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$. Далее разобраны свойства функций $w=Lnz$ и $w=\sqrt{z}$ и построение римановых поверхностей для этих функций

Г. Ц. Тумаркин

7824. **Замечание к конформному отображению двусвязных областей. Бибербах** (Eine Bemerkung zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. Bieberbach Ludwig), Math. Z., 1957, 67, № 2, 99—102 (нем.)

Заметка посвящена Г. Фаберу по случаю его 80-летия. В ней доказана следующая теорема. Пусть G_1 и G_2 — две однолистные односвязные области с непустым пересечением $G_1 \cap G_2$, границы C_1 и C_2 которых содержат каждая более одной точки, причем по крайней мере одна из точек непустого пересечения границ $C_1 \cap C_2$ достижима из $G_1 \cap G_2$ по некоторому пути. Тогда любая двусвязная область с отличными от точки компонентами границы может быть конформно отображена на кусок двулистной римановой поверхности, который получается путем соединения областей G_1 и G_2, предполагаемых расположенными на разных листах, вдоль разреза, проведенного через две надлежащим образом выбранные точки разветвления, принадлежащие $G_1 \cap G_2$.

Эта теорема является обобщением известной теоремы о возможности конформного отображения двусвязной области на двулистный круг. Доказательство проводится путем установления конформной полноты семейства двусвязных римановых областей, получаемых вышеуказанным способом при непрерывном изменении расположения точек разветвления в соответствующей связной части $G_1 \cap G_2$. При доказательстве используется метод экстремальной длины. В. А. Зморович

7825. **О свойствах гармонических отображений плоских областей. Кудрявцев Л. Д.**, Матем. сб., 1955, 36, № 2, 201—208

Изложены результаты, данные автором ранее без доказательств (РЖМат, 1954, 4408).

7826. **Заметка о функциях, близких к выпуклым. Мики** (A note on close-to-convex functions. Miki Yoshikazu), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 3, 256—268 (англ.)

Рассматривается класс функций, близких к выпуклым, введенный Капланом. Функция $f(z)$, регулярная в $|z|<1$, называется функцией, близкой к выпуклым, если существует функция $\varphi(z)$, выпуклая и однолистная в $|z|<1$, такая, что $\mathrm{Re}\{f'(z)/\varphi'(z)\}>0$ в $|z|<1$. Автор называет $f(z)$ в этом случае также функцией, близкой к выпуклым относительно $\varphi(z)$. Получен следующий результат.

Пусть функция $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ является функцией, близкой к выпуклым относительно функции $\varphi(z)=z+b_2z^2+\ldots$. Тогда в круге $|z|<1/4$ n-я частичная сумма $S_n(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ ряда для $f(z)$ является функцией, близкой к выпуклым относительно n-й частичной суммы $\sigma_n(z)=z+b_2z^2+\ldots+b_nz^n$ ряда для $\varphi(z)$.

Константа 1/4 не может быть увеличена. Заметим, что Сеге ранее показал, что $\sigma_n(z)$ является в $|z|<1/4$ выпуклой однолистной функцией.

Библ. 7 назв.

Ю. Д. Максимов

7827. **К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций. Чеботарев Г. Н.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, **116**, № 4, 31—58

Пусть L — совокупность замкнутых гладких контуров, ограничивающих некоторую связную область D^+ и пусть D^- — область, дополняющая $D^+ + L$ до полной плоскости. В работе исследуется случай, когда граничная задачи Римана для нескольких неизвестных функций может быть решена в замкнутой форме. Задача Римана заключается в следующем. Требуется найти кусочно-голоморфный в областях D^+ и D^- вектор $\varphi(z)=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ по граничному условию

$$\varphi^+(t_0)=A(t_0)\varphi^-(t_0), \qquad (1)$$

где $A(t_0)$ — заданная неособенная матрица, удовлетворяющая условию Гёльдера. В случае $n=1$ граничному условию (1) удовлетворяет функция

$$\varphi(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt}. \qquad (2)$$

Применяя теорию функций от матриц, рассматриваются такие матрицы $A(t)$, для которых краевая задача Римана может быть решена по формуле (2). Это обстоятельство всегда имеет место, если

$$e^Be^C=e^{B+C}, \text{ где } B(t_0)=\ln A(t_0), \quad C(t_0)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln A(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln A(t)}{t-t_0}\,dt.$$

Исследование возможности применения формулы (2) для решения задачи (1) автор разделяет на следующие этапы: 1) Исследование случая, когда $A(t)$ функционально — коммутативна; 2) нахождение общих условий коммутативности функциональной матрицы $\ln A(t_0)$ со своим сингулярным интегралом; 3) исследование возможности решения краевой задачи по формуле (2) при некоммутативных B и C.

Н. П. Векуа

7828. **О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Чибрикова Л. И.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, 116, № 4, 59—110

Пусть L — некоторый гладкий замкнутый или разомкнутый контур, расположенный в одной из областей S некоторой функциональной (фуксовой или элементарной) группы Γ дробно-линейных подстановок $\omega_0(z)=z$, $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, ... и пусть L_k ($k=1, 2, \ldots$) — контуры, эквивалентные контуру L. Предполагается, что все линии L_k ($k=1, 2, \ldots$) различны между собой и могут пересекаться друг с другом и с L лишь в конечном числе точек. Однозначную функцию $\varphi(z)$ точек z области S автор называет кусочно-мероморфной автоморфной функцией с линией скачков L и принадлежащей группе Γ, если соблюдены следующие условия:

1. Она автоморфна относительно подстановок группы Γ, т. е. $\varphi[\omega_k(z)]=\varphi(z)$.

2. Все существенно особые точки ее являются предельными точками группы и в любой фундаментальной области она имеет конечное число полюсов.

3. Она непрерывно продолжима на каждую точку контура (следовательно, и на точки линий L_k), кроме, быть может, концов, вблизи которых она удовлетворяет условию

$$|\varphi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^\alpha}, \quad \alpha<1,$$

и точек пересечения контуров L, L_k (d — точек), вблизи которых $\varphi(z)$ почти ограничена, т. е.

$$\lim_{z\to d}(z-d)^{\varepsilon}\varphi(z)=0,$$

какова бы ни была положительная постоянная ε.

В работе рассматривается следующая задача Римана: Найти кусочно-мероморфную (кусочно-голоморфную) автоморфную функцию $\varphi(z)$, имеющую полюсы заданного порядка в фиксированных точках области S, по граничному условию

$$\varphi^{+}(t)=G(t)\varphi^{-}(t)+g(t),$$

где $G(t)$, $g(t)$ — заданные функции точек контура L, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $G(t)\neq 0$ всюду на L.

Далее изучаются краевые задачи Римана и Гильберта для однопериодических и эллиптических функций. Решение задачи Римана для автоморфных функций используется при решении некоторых сингулярных интегральных уравнений, а также — при решении некоторых граничных задач гидромеханики.

Н. П. Векуа

7829. Многочлены, минимальные p-й степени на конечной системе точек. Моцкин, Уолш (Least p-th power polynomials on a finite point set. Motzkin T. S., Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 2, 371—396 (англ.)

Рассматривается в комплексной области экстремальная проблема, подобная той, которая в действительной области изучалась авторами ранее (РЖМат, 1956, 2122).

Если E — множество m различных точек комплексной плоскости $z_1, z_2, \ldots, z_m$, то T-полиномом T_n называется тот полином $z^n+az^{n-1}+\ldots$, для которого сумма $\sum_k \mu_k |T_n(z_k)|^p$, где $\mu_k>0$, $p>0$, принимает наименьшее значение.

Доказываются следующие характерные свойства T-полиномов:

1. При $p=1$ множество T-полиномов T_{m-1} тождественно со множеством полиномов вида $\omega(z)\sum_k \lambda_k/(z-z_k)$, где $\omega(z)=\prod_k(z-z_k)$, $\sum_k\lambda_k=1$, $\lambda_k\geqslant 0$ для $z_k\in E'$, $\lambda_k=0$ для $z_k\in E-E'$, а E' — подмножество E, состоящее из тех точек z_k, в которых числа $\mu_k|\omega'(z_k)|$ принимают наименьшие значения.

2. При $p>1$ T-полином T_{m-1} единственен и определяется равенствами

$$T_{m-1}(z_k)=$$

$$=[\mu_k|\omega'(z_k)|^p]^{-1/(p-1)}\omega'(z_k)/\sum_j[\mu_j|\omega'(z_j)|^p]^{-1/(p-1)},$$

3. При $0<p<1$ T-полином T_{m-1} равен $\omega'(z_k)$ в тех точках z_k, в которых числа $\mu_k|\omega'(z_k)|^p$ принимают наименьшие значения, и равен нулю в остальных точках множества E.

Далее рассмотрены: расположение нулей T-полиномов, связь между T-полиномами, порожденными различными множествами E, изменение T-полиномов при добавлении к множеству E точки, или устранении из него точки, условия ортогональности, выполняемые T-полиномами, связь рассматриваемой экстремальной проблемы с аппроксимацией на бесконечном множестве точек. В случае действительного E дана особая характеристика T-полиномов T_n при $n<m$. Некоторые теоремы доказаны при значительно более общем определении функции ошибки, чем $\sum_k \mu_k|T_n(z_k)|^p$.

С. Ф. Пашковский

7830. Некоторые теоремы о граничных значениях результанта функций, принадлежащих классу H_δ ($0<\delta<1$) и некоторым другим классам аналитических функций. Дайович (Неколико ставова о граничним вредностима резултанте функција класе H_δ ($0<\delta<1$) и још неких класа аналитичких функција. Дајовић Војин), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, 7, № 1-2, 21—38 (серб.; рез. франц.)

Работа посвящена доказательству теоремы, которая неверна (РЖМат, 1956, 8752).

7831. Некоторые теоремы о существовании предельных значений результанта некоторых классов аналитических функций. Дайович (Quelques théorèmes sur l'existence des valeurs limites de la résultante de certaines classes de fonctions analytiques. Daïovitch Voïn), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 17, 2087—2090 (франц.)

Автор пытается дать новое доказательство своей ошибочной теоремы (РЖМат, 1956, 8752). При этом снова при рассуждении допускает ошибку. Г. Ц. Тумаркин

7832. О существовании предельных значений результанта функций, принадлежащих классу H_δ, $\delta>1$. Дайович (Sur l'existence des valeurs limites de la résultante des fonctions appartenant à la classe H_δ, $\delta>1$. Daïovitch Voïn), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 1-2, 23—28 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Доказывается теорема: Результант $F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu z^\nu$ функций $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$, $f(z)\in H_\delta$, $\delta>1$, и функции $g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu$, $g(z)\in H_{\delta'}$, где $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}=1$, есть функция регулярная и ограниченная внутри единичного круга и, следовательно, имеющая почти всюду на $|z|=1$ определенные предельные значения.

Г. Ц. Тумаркин

7833. О целых функциях бесконечного порядка. Рахман (On entire functions of infinite order. Rahman Qazi Ibadur), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 2, 165—169 (англ.)

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — целая функция бесконечного порядка и пусть $M(r)$, $M(r, f^{(p)})$, $\mu(r)$, $\nu(r, f^{(p)})$ имеют их обычные значения. Если s есть функция от ν такая, что $s(\nu)=o(\nu/\ln\nu)$, то, как показал Клуни (РЖМат, 1956, 5831)

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\ln\{r^sM(r, f^{(s)})\}/\nu(r, f)=0.$$

В работе доказано, что если S и s являются функциями от ν такими, что $S(\nu)=O(\nu\ln\nu)$, $s(\nu)=o(\nu/\ln\nu)$, причем $s(\nu)$ — целое число, то

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln\{r^sM(r, f^{(s)})\}}{\nu(r, f^{(k)})}=0,$$

каково бы ни было целое неотрицательное k. Далее доказывается, что при любом вещественном m имеет место соотношение

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{r^m}{\nu(r, f)}\int_a^r\frac{\nu(x, f)\,dx}{x^{m+1}}=0\quad(a=\text{const}),$$

которое обобщает результат Шаха (Shah, Math. Student, 1942, 10, 80—82), состоявший в том, что

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\ln\mu(r)/\nu(r, f)=0.$$

В. С. Виденский

7834. К исследованию мероморфной функции в окрестности особого множества емкости нуль. Эрве (Contribution à l'étude d'une fonction méromorphe au voisinage d'un ensemble singulier de capacité nulle. Hervé Michel), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 2, 161—173 (франц.)

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в произвольной области D комплексной плоскости z, C — граница D, $E \subset C$ — замкнутое множество емкости нуль; предполагается, что все точки $C \setminus C'$ и $C \setminus (\overline{C \setminus E})$ являются существенно особыми точками $f(z)$. Если $\zeta \in C$ и $\Delta \subset D$, $\zeta \in \overline{\Delta}$, то $S_\zeta^{(\Delta)}$ обозначает множество всех точек w таких, что $w = \lim f(z_n)$, $z_n \in \Delta$; $S_\zeta^{*(C)}$ — множество всех точек w таких, что $w = \lim w_n$, $w_n \in S_{\zeta_n}^{(D)}$; $\zeta_n \in C - \zeta - E$, $\zeta_n \to \zeta$. Число w называется исключительным значением $f(z)$ в точке ζ, если $f(z) \neq w$ в некоторой окрестности ζ; оно называется асимптотическим значением, если для некоторой непрерывной дуги Δ, принадлежащей D, за исключением своего конца ζ, соответствующее $S_\zeta^{(\Delta)}$ содержит только одну точку w. Исследования автора примыкают к теореме Каметани (Kametani S., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, 17, 429), утверждающей, что исключительные значения функции $f(z)$ в точке ζ, принадлежащие $S_\zeta^{(D)} \setminus S_\zeta^{*(C)}$, образуют множество внутренней емкости нуль. Автора интересует случай, когда не выполняется теорема, аналогичная теореме Пикара, т. е. когда число этих исключительных значений больше двух.

Теорема 1. Если $\zeta \in E$ и некоторая связная компонента множества $S_\zeta^{(D)} \setminus S_\zeta^{*(C)}$ (открытого) содержит 3 исключительных значения w, w', w^* функции $f(z)$ в точке ζ, то для всякой области U, содержащей эти значения и такой, что $\overline{U} \subset S_\zeta^{(D)} \setminus S_\zeta^{*(C)}$ можно извлечь из E совершенное множество P, $\zeta \in P$, для которого: а) из $\zeta' \in P$ следует $U \subset S_{\zeta'}^{(D)} \setminus S_{\zeta'}^{*(C)}$; в) из $\zeta' \in C \setminus P$ при $|\zeta' - \zeta|$ достаточно малом следует, что U и $S_{\zeta'}^{(D)}$ не имеют общих точек.

Теорема 3 (дополняющая теорему 1). Для всякого замкнутого множества $\mathfrak{X}$ такого, что одна из связных компонент $U \setminus \mathfrak{X}$ содержит w' и w^*, множество $p(m, \mathfrak{X})$ тех точек $\xi \in P$, для которых существует континуум Ξ, удовлетворяющий условиям: α) $\xi \in \Xi$, β) диаметр $\Xi \geqslant \frac{1}{m}$, γ) из $z \in \Xi$ следует, что $z \in D$ и $f(z) \in \mathfrak{X}$, является нигде не плотным на P.

Теорема 4. Если $w \in S_\zeta^{(D)} \setminus S_\zeta^{*(C)}$, $w = \lim w_p$, причем $f(z) \neq w_p$ для $z \in D$ и $|z - \zeta| < r$, каково бы ни было p, то множество тех точек E, в которых $f(z)$ допускает w в качестве асимптотического значения, содержит совершенное множество точек.

А. И. Маркушевич

7835. Каноническое произведение для функции, мероморфной в единичном круге. Цудзи (Canonical product for a meromorphic function in a unit circle. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 1, 7—21 (англ.)

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек внутри единичного круга; показателем сходимости μ этой последовательности называется верхняя грань чисел α, для которых $\sum_1^\infty (1 - |a_n|)^{1+\alpha} = \infty$, если $\sum_1^\infty (1 - |a_n|) = \infty$, и число 0, если $\sum_1^\infty (1 - |a_n|) < \infty$. При $\mu < \infty$ существует целое неотрицательное p такое, что $\sum_1^\infty (1 - |a_n|)^p = \infty$ и $\sum_1^\infty (1 - |a_n|)^{p+1} < \infty$.

Образуется каноническое произведение

$$P(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}\right) \exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}\right)^k\right\}.$$

Теорема 1.

$$\ln^+ |P(z)| \leqslant 2^{p+1} \sum_1^\infty \left|\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}\right|^{\mu+1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon = 0$, если $p = \mu$, и $0 < \varepsilon \leqslant 1 - (\mu - [\mu])$, если $p \neq \mu$.

Теорема 2. Порядок функции $P(z)$ равен μ.

Теорема 3. Функцию, мероморфную в единичном круге конечного порядка ρ, можно представить в виде: $w_1(z)/w_2(z)$, где $w_1(z)$, $w_2(z)$ регулярны в этом круге и имеют порядок не выше ρ.

Теорема 4. Пусть C_n — окружность $|z - a_n| = (1 - |a_n|^2)^{\mu+4}$; при $1/2 \leqslant |z| < 1$ и вне C_n

$$(n = 1, 2, \ldots): \quad \ln^+ \frac{1}{|P(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant C \ln \frac{1}{1 - |z|} \sum_1^\infty \left|\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n^2}\right|^{\mu+1+\varepsilon};$$

здесь $\varepsilon = 0$, если $\sum_1^\infty (1 - |a_n|) < \infty$, или $\sum_1^\infty (1 - |a_n|) = \infty$ и $p = \mu$; при $p \neq \mu$: $0 < \varepsilon \leqslant 1 - (\mu - [\mu])$.

Теорема 5. Порядки функций $w(z)$ и $w'(z)$, где $w(z)$ есть функция, мероморфная в единичном круге, совпадают:

Для случая функций, мероморфных в конечной плоскости, теорема, аналогичная 5, была получена ранее Уиттекером и Валироном (Whittaker J. M., J. London Math. Soc., 1936, 11).

Примечание референта. Ряд общих результатов (аналогичных теоремам 2 и 3) о представлении функций, мероморфных в единичном круге, бесконечными произведениями рассматриваемого вида был получен М. М. Джрбашяном (Сообщ. Ин-та Матем. и механики АН АрмССР, 1948, вып. 2).

А. И. Маркушевич

7836. Некоторые приложения гиперболической меры. Константинеску (Einige Anwendungen des hyperbolischen Maßes. Constantinescu Corneliu), Math. Nachr., 1956, 15, № 3, 155—172 (нем.)

Результаты статьи были анонсированы автором (РЖМат, 1957, 3038) и частично доказаны в статье (РЖМат, 1957, 3039). Формулировки некоторых теорем несколько усилены.

А. А. Гольдберг

7837. О принципе симметрии и распределении значений ограниченных аналитических функций. Ловатер (Sur le principe de symétrie et la répartition des valeurs des fonctions analytiques bornées. Lohwater Arthur J.), C. r. Acad., sci, 1956, 242, № 19, 2278—2281 (франц.)

С помощью простых топологических соображений доказываются теоремы, уточняющие аналогичные предложения Сейдела (Seidel, Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36, 201—226) и Каратеодори (Carathéodory, Comment. math. helv., 1947, 19, 263—273). Пусть для функции $w = f(z)$, мероморфной в единичном круге, почти всюду на дуге A единичной окружности существуют радиальные граничные значения с модулем 1. Если P — особая точка функции на дуге A, то множество $R(P)$ значений, принимаемых функцией в любой окрестности

этой точки, совпадает с точностью до множества емкости нуль с одним из множеств: $|w|<1$, $|w|>1$, $|w|\neq 1$. В случае, когда $f(z)$ — ограниченная функция, множество $R(P)$ с точностью до множества емкости нуль есть $|w|<1$. Развернутое изложение приведенных результатов дано автором в другой работе (РЖМат, 1957, 6303). А. И. Маркушевич

7838. Свойство счетности римановой поверхности. Неванлинна (Countability of a Riemann surface. Nevanlinna Rolf), Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 61—64 (англ.)

Краткое изложение рассуждений, примененных автором для доказательства теоремы Радо о том, что каждая риманова поверхность удовлетворяет аксиоме счетности, т. е. может быть покрыта не более чем счетным числом параметрических окрестностей. Подробное доказательство приведено в гл. IV монографии автора «Униформизация» (М., Изд-во ин. лит., 1955; РЖМат, 1956, 7313). Г. Ц. Тумаркин

7839. К теории наилучшего приближения функций многих переменных с помощью целых функций конечной степени. Иноземцев О. И., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 396—412

Статья содержит развернутое изложение теорем, ранее опубликованных автором (РЖМат, 1953, 1146) без доказательства. А. Ф. Тиман

7840. О параметрическом представлении и о некоторых экстремальных свойствах целых функций многих переменных. Хачатрян И. О., Изв. АН АрмССР, физ.-матем., естеств. и техн. н., 1956, 9, № 9, 3—14 (рез. арм.)

Распространяется известная теорема Винера—Палея о целых функциях экспоненциального типа на случай целых функций нескольких переменных. Автор опирается на результаты М. М. Джрбашяна, связанные с изучением некоторых специальных классов целых функций многих переменных, имеющих различные порядки и типы роста по отдельным переменным (РЖМат, 1957, 380).

Приводится также неравенство для частных производных, аналогичное неравенству С. Н. Бернштейна (Докл. АН СССР, 1948, 60, № 9), в случае функций одной переменной. А. Ф. Тиман

7841. Один тип выпуклости в пространстве n-комплексных переменных. Леу (A type of convexity in the space of n-complex variables. Leeuw K.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 1, 193—204 (англ.)

Пусть X — компактное подмножество пространства n комплексных переменных C^n. Пусть $C_p(X)$ — множество тех точек y в C^n, в которых для всякого полинома f выполняется неравенство

$$|f(y)| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

$C_p(X)$ замкнуто и компактно. Пусть H — абелева группа и $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ — множество элементов, которые порождают H. Пусть S — подполугруппа группы H, порождаемая s_i, т. е. S состоит из всех $s_1^{m_1}s_2^{m_2}\ldots s_n^{m_n}$, m_i — целые неотрицательные, не все равные нулю. Через $H(S, C)$ обозначается множество всех отображений φ полугруппы S на комплексные числа, для которых $\varphi(ss') = \varphi(s)\varphi(s')$. $H(S, C)$ погружено в C^n посредством отображения $\mu(\varphi) = (\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n))$. Образ $H(S, C)$ обозначается через V и $H(S, C)$ отождествляется с подмножеством из C^n. Подмножество W пространства C^n называется V-круговым, если W содержится в V и всякий раз, когда точка $w\in W$, точка $v\in V$ и $|w_i| = |v_i|$ для всех i, точка $v\in W$ (как частный случай это условие появляется в определении областей Рейнгардта).

Для всякого компактного подмножества X множества V через $C_M(X)$ обозначается пересечение V со всеми множествами вида $\{z : |z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}| \leqslant r\}$, m_i — целое неотрицательное, содержащее X. Доказывается

Теорема 1. Если X компактное V — круговое подмножество из C^n. Тогда $C_P(X) = C_M(X)$.

Связанный с этим результат, относящийся к характеристике максимальных областей Рейнгардта, имеется у Картана (Cartan H., J. math., 1931, 96).

Вторая теорема характеризует круговое множество X, которое удовлетворяет условию $C_P(X) = X$, как область сходимости степенных рядов некоторого определенного типа. Работа связана с классификацией однородных банаховых алгебр на компактных абелевых группах. Е. Н. Аравийская

7842. Некоторые комбинаторные результаты, касающиеся степеней матриц. Уитл (Some combinatorial results for matrix powers. Whittle P.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 316—320 (англ.)

Методом порождающих функций получаются результаты, касающиеся степеней матриц, имеющих применение в теории цепей Маркова. Доказывается теорема: Если элементы a_{jk} ($j, k = 1, 2, \ldots, p$) матрицы вещественны и удовлетворяют соотношениям

$$a_{jj} > \sum_{k\neq j} |a_{jk}| \quad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

то член C_0, свободный от $z_1, \ldots, z_p$ в разложении в ряд Лорана функции

$$F(z_1, \ldots, z_p) = \prod_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} z_k / z_j\right)^{-1}$$

в полицилиндре $K(1-\delta) < |z_j| < K(1+\delta)$, где K произвольно, а δ достаточно мало, равен $|A|^{-1}$.

Отсюда получается комбинаторная формула, выражающая элементы целой положительной степени матрицы B^N через элементы матрицы B (обобщение ранее опубликованного результата, см. РЖМат, 1957, 4221). Дается асимптотическая оценка некоторых произведений сумм, связанных с элементами матрицы B^N. Е. Н. Аравийская

7843. Теория функций тернарного комплексного переменного. Нисигаки (A theory of functions of a ternary complex variable. I. Nisigaki Hisami). Mem. School Sci. Engng. Waseda Univ., Tokyo, 1954 № 18, 110—122 (англ.)

Для любой линейной, коммутативной и ассоциативной алгебры порядка три с единицей над действительным полем, показывается, как выбрать базис I, E_2, E_3 так, чтобы I было единицей, $E_2^2 = \alpha E_2 + \beta E_3$, $E_3^2 = \gamma E_2 + \delta E_3$, $E_2E_3 = \varepsilon I + \delta E_2 + \alpha E_3$, где $\varepsilon = \beta\gamma - \alpha\delta$. Тогда E_2 и E_3 удовлетворяют соответственно скалярным уравнениям

$$x^3 - 2\alpha x^2 + (\delta^2 - \beta\delta)x - \beta\varepsilon = 0, \quad y^3 - 2\delta y^2 + (\delta^2 - \alpha\gamma)y - \gamma\varepsilon = 0.$$

Если $\beta\gamma \neq 0$ автор показывает, что $y = (\delta x + \varepsilon)/(x - \alpha)$ и что если первое кубическое уравнение имеет различные корни, два равных корня или три равных корня, то то же будет и для корней второго уравнения. В каждом из этих случаев он показывает, как выбрать базис I_1, I_2, I_3 так, чтобы $I = I_1 + I_2 + I_3$ и каждое из I_i было идемпотентным или нильпотентным. В терминах сопряженных корней кубических

уравнений определяются сопряженные к E_2 и E_3. Для $X = x_1 I + x_2 E_2 + x_3 E_3$ автор определяет

$$X' = x_1 I + x_2 E_2' + x_3 E_3' \text{ и } X'' = x_1 + x_2 E_2'' + x_3 E_3''.$$

Он определяет $N(X) = XX'X''$ как норму X. Тогда $N(X)$ имеет свойства: $N(X) = N(X') = N(X'')$, $N(XY) = N(X)\,N(Y)$ и $N(X) = 0$ тогда и только тогда, когда X — нильпотентно. Многообразие $N(X) = 0$ называется нильфактором алгебры.

J. A. Ward

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 28

7844. О радиальном порядке субгармонических функций. Геринг (On the radial order of subharmonic functions. Gehring F. W.), J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, № 1, 77—79 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $w(z) \geqslant 0$ — субгармоническая функция в $|z| < 1$, причем

$$\int\int_{|z|<1} w^p(z)\,dxdy < \infty, \quad z = x + iy, \quad p > 1.$$

Тогда для почти всех θ $w(z) = o\left\{(1 - |z|)^{-1/p}\right\}$ равномерно при $z \to e^{i\theta}$ в любом угле с вершиной в $e^{i\theta}$, сторонами которого служат хорды круга $|z| < 1$. С помощью этой теоремы удается упростить доказательство теоремы Сейделя и Уолша (Seidel W., Walsh J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 52, 128—216) о том, что для производной $f'(z)$ однолистной в круге $|z| < 1$ функции для почти всех θ выполняется условие $f'(z) = o\{(1 - |z|)^{-1/2}\}$ при таком же характере стремления z к $e^{i\theta}$, как было описано выше.

Установленная теорема позволяет также дать усиление теоремы Цудзи (РЖМат, 1956, 2159): предполагая, что для аналитической в круге функции $f(z)$ имеет место $\int\int_{|z|<1} |f(z)|^p\,dxdy < \infty$ при $p > 0$, получаем, что для почти всех θ $f(z) = o\left\{(1 - |z|)^{-1/p}\right\}$ при тех же условиях, что и раньше. Г. Ц. Тумаркин

7845. Об одном неравенстве Фейера и Рисса. Хубер (On an inequality of Fejér and Riesz. Huber Alfred), Ann. Math., 1956, 63, № 3, 572—587 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть в круге $|z| \leqslant 1$ $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_1(z)$, $u_2(z)$ — субгармонические функции. Если

$$u_2(z) = h_2(z) - \int_{|\zeta|<1} g(z, \zeta)\,d\mu_2(\zeta)$$

— разложение Ф. Рисса и $\alpha < 1$ есть полная масса μ_2, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp u(e^{it})\,dt \geqslant 2\cos\frac{\pi\alpha}{2} \int_{-1}^{1} \exp u(re^{i\theta})\,dz$$

$$(0 \leqslant \theta < 2\pi). \qquad (1)$$

Если $u_1(z) = \lambda \ln |f(z)|$, где $\lambda > 0$, $f(z)$ — регулярная в $|z| \leqslant 1$ функция, а $u_2(z) \equiv 0$, то получается неравенство Фейера и Рисса. Предположение $\alpha < 1$ существенно. Равенство в (1) достигается только в случае $0 < \alpha < 1$ и $u = \ln |F'(z)\,(F(z))^{-\alpha}\,(1 - F^2(z))^{\alpha-1}| + c$, где $F(z)$ конформно отображает $|z| < 1$ на себя, причем диаметр $(e^{i\theta}, -e^{i\theta})$ переходит в вещественную ось, а c — вещественная константа.

Основная теорема обобщается, во-первых, на случай, когда функция $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ задана в открытом круге $|z| < 1$, и тогда требуется, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\{h(re^{it})\}\,dt = O(1) \quad (r < 1)$$

где $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$, а h_1, h_2 — наилучшие гармонические мажоранты функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$, и, во-вторых, на случай любой односвязной области, причем интегрирование по диаметру в правой части (1) заменяется интегрированием по любой кривой, являющейся конформным образом диаметра круга.

Даны приложения к оценке квадратичной формы гильбертова типа и к поверхностям, у которых «положительная полная кривизна»

$$T^+ = \int_D K^+ dS, \quad K^+ = \max\{K, 0\},$$

K — гауссова кривизна, меньше 2π. Аналогичные приложения в простейших случаях $\alpha = 0$, $K = 0$ имеются в работе Фейера и Рисса (Math. Z., 1921, 11, 305—314).

Н. С. Ландкоф

7846. Квазигармонические и квазианалитические функции на поверхностях. Данилюк И. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 95—101

Хорошо известно, что ряд свойств решений системы Коши—Римана остаются в силе и для решений более общей эллиптической линейной системы двух уравнений

$$\partial u^1/\partial x^i = \alpha_i^j\,\partial u^2/\partial x^j \qquad (1)$$

(применяется тензорная запись) в случае, когда $z = x_1 + ix_2$ меняется в плоской области. Как система Коши—Римана, так и система Бельтрами хорошо изучены на двумерных многообразиях общей природы (см., например, РЖМат, 1956, 7312, а также реф. 7848 K). Некоторые свойства решений этих систем на многообразиях сохраняются и для системы (1).

Реферируемая работа посвящена обнаруживанию именно этого факта. А. В. Бицадзе

7847. Аналитический метод расчета плоского магнитного поля в однородной среде от токов, протекающих по проводникам произвольного сечения. Синельников Е. М., Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1956, 43/57, 29—35

Дается упрощение одной интегральной формулы для расчета потенциала магнитного поля на границе воздушного зазора машины постоянного электрического тока. Г. Н. Положий

7848 К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. Шиффер М., Спенсер Д. К. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1957, 347 стр., 20 р. 70 к.

7849 К. Лекции по теории функций комплексного переменного. Под ред. Каплана (Lectures on functions of a complex variable. Ed. Kaplan Wilfred. Ann Arbor, Michigan Univ. Press; London. Oxford Univ., Press., 1955, ix, 435 pp., ill., 80 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 319, 12 (англ.)

7850 Д. Классификация факторов автоморфности. Ганнинг (A classification of factors of automorphy. Gunning Robert Clifford. — Doct. diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2225 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 8012; 1957, 4763.

См. также: 7601, 7782, 7885, 7982, 7985, 7987, 8042 К

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7851. Распространение на теорему Мейера о решениях системы уравнений в полных дифференциалах конструктивного усовершенствования Пиконе и некоторые другие замечания. Биринделли (Estensioni al teorema di Meyer, sulle soluzioni di sistemi di equazioni ai differenziali totali, di un perfezionamento costruttivo del Picone e qualche ulteriore osservazione. Birindelli Carlo), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 1-2, 177—187 (итал.)

Рассматривается уравнение $dx = \left\| f_k^{(m)} \right\| dt$, где $t = [t_1, \ldots, t_r]$ — вектор, заданный в связной области $T \subset E_r$ и $x = [x_1, \ldots, x_p]$ — такой вектор, что точка $P(t_1, \ldots, t_r, x_1, \ldots, x_p)$ всегда принадлежит связной области $U \subset E_{r+p}$, для которой T является проекцией; элементы матрицы $\left\| f_k^{(m)} \right\|$, являющиеся компонентами векторов

$$f^{(i)}(t, x) = \left[f_1^{(i)}(t, x), \ldots, f_p^{(i)}(t, x) \right], \qquad i = 1, \ldots, r,$$

предполагаются непрерывными в U вместе с производными

$$f^{(i,j)} = \partial f^{(i)} / \partial t_j, \quad \varphi^{(i,k)} = \partial f^{(i)} / \partial x_k.$$

Предполагается, что

$$f^{(i,j)} - f^{(j,i)} + \sum_{k=1}^{p} \left[\varphi^{(i,k)} f_k^{(j)} - \varphi^{(j,k)} f_k^{(i)} \right] \equiv 0,$$

т. е., что уравнение (соответствующая система уравнений) вполне интегрируемо. Автор применяет метод Пиконе (Ann. mat. pura ed Appl., 1949, 28 (4), 195—203) для продолжения решения, устанавливаемого теоремой существования Мейера в некотором параллелепипеде, на максимально возможную область. Г. И. Дринфельд

7852. Дополнения к исследованиям Камке. Заметка I. Митринович (Compléments au traité de Kamke. Note I. Mitrinovitch D. S.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, № 3, 58—60 (франц.)

Имеется в виду книга Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд-во ин. лит., М., 1951. Kamke E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, Leipzig, 1942). Для уравнения

$$x \left[x^p y^q + f(x, y) \right] dy + y \left[x^p y^q + g(x, y) \right] dx = 0$$

находится интегрирующий множитель

$$\frac{x^{q-p-1} y^{-1}}{f(x, y) - g(x, y)} \exp \left[(p - q) \int \frac{f(x, y)}{f(x, y) - g(x, y)} \times \right.$$

$$\left. \times d \ln (x, y) \right].$$

Для уравнений

$$x \left[a_1 x^p y^q + f(x^r y^s) \right] dy + y \left[a_2 x^p y^q + g(x^r y^s) \right] dx = 0,$$

$$x \left[a_1 x^p y^q + b_1 x^r y^s + f(x, y) \right] dy +$$

$$+ y \left[a_2 x^p y^q + b_2 x^r y^s + g(x, y) \right] dx = 0,$$

$$x \left[a_1 x^p + b_1 y x^2 + c_1 x y^2 + d_1 \right] dy +$$

$$+ y \left[a_2 x^p + b_2 x^2 y + c_2 x y^2 + d_2 \right] dx = 0$$

рекомендуются интегрирующие множители соответственно

$$F(x, y) \cdot G(x^r y^s),$$

$$F(x, y) \cdot G(x^2 y) \cdot H(x y^2) \text{ или } x^\lambda y^\mu F(x, y),$$

$$F(x^2 y) \cdot G(x y^2) \cdot H(y/x).$$

Автор утверждает, что при различных дополнительных соотношениях между параметрами уравнений можно найти интегрирующие множители указанных видов. М. И. Серов

7853. Дополнения к исследованиям Камке. Заметка II. Митринович (Compléments au traité de Kamke. Note II. Mitrinovitch Dragoslav S.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, **7**, № 3-4, 161—164 (франц., рез. серб.)

Автор ставит своей целью публикацию ряда заметок, дополняющих книгу Камке (см. реф. 7852), в которых систематизируются случаи интегрируемости в квадратурах, или в известных специальных функциях, некоторых типов дифференциальных уравнений и приводятся библиографические данные, к ним относящиеся.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$d^2y/dx^2 + [\alpha f f' (f^2 + \beta)^{-1} - f'' (f')^{-1}] \, dy/dx + \\ + \gamma f'^2 (f^2 + \beta)^{-1} y = 0, \qquad (1)$$

где $f = f(x)$, $f' = df/dx$, α, β, γ — постоянные, причем $\beta\gamma \neq 0$, частные случаи которого были проинтегрированы в элементарных функциях Форсайтом (Forsyth), Шпитцером (Spitzer) и Инсе (Ince). Указывается, что при помощи подстановки $y = \sigma(f)$ уравнение (1) приводится к виду

$$(f^2 + \beta) \, d^2\sigma/df^2 + \alpha f \, d\sigma/df + \gamma\sigma = 0, \qquad (2)$$

для которого у Камке имеются некоторые случаи интегрируемости в квадратурах, тем самым можно получить ряд случаев интегрируемости уравнения (1). Б. П. Демидович

7854. Дополнения к исследованиям Камке. Заметка III. Митринович (Compléments au traité de Kamke. Note III. Mitrinovitch Dragoslav S.), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 168—171 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x^\alpha y^\beta (y')^\gamma + A y^\lambda (y')^\mu + B x^\nu = 0, \qquad (1)$$

где $x > 0$, $y > 0$, $y' = dy/dx > 0$ и α, β, γ, λ, μ, ν, A, B — действительные постоянные, причем $AB \neq 0$, $|\alpha| + |\nu| > 0$, $|\beta| + |\lambda| > 0$, $|\gamma| + |\mu| > 0$. Даются достаточные условия существования решений в параметрическом виде

$$x = \exp \xi(t), \quad y = \eta(t) \exp k\xi(t),$$

где k — надлежащим образом подобранная постоянная, t — параметр, $\xi(t)$ — функция известного вида и $\eta(t)$ — функция, находимая с помощью квадратур. Этот метод позволяет естественным путем получить многочисленные случаи интегрируемости дифференциальных уравнений вида (1), найденные Камке.

Б. П. Демидович

7855. **Дополнение к исследованиям Камке. Заметка IV. Митринович** (Compléments au traité de Kamke. Note IV. Mitrinović Dragoslav S.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, **11**, № 1, 7—10 (франц.; рез. сербо-хорв.)

7856. **О переменном коэффициенте Липшица в проблеме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Винтнер** (On non-constant Lipschitz factors in the uniqueness ptoblem of ordinary differential equations. Wintner Aurel), Arch. Math., 1956, **7**, № 6, 465—468 (англ.)

Полученные автором результаты ошибочны из-за того, что при цитировании теоремы Камке (Kamke E., Differential-gleichungen reeler Funktionen, Leipzig, 1930, стр. 139) допущена неточность в ее формулировке: $x'(t) \to 0$ при $t \to 0$ у автора вместо $x'(0) = 0$ у Камке. Существуют примеры, показывающие, что в данной автором формулировке не верны ни теорема Камке, ни сформулированное в статье достаточное условие единственности решения дифференциального уравнения. А. Ф. Филиппов

7857. **Одно обобщение классической теории Штурма—Лиувилля. Вейнбергер** (An extension of the classical Sturm-Liouville theory. Weinberger H. F.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 1, 1—14 (англ.)

Считая решенной самосопряженную дифференциальную систему (A), состоящую из уравнения

$$L[u] - (-1)^n \lambda q(x) u = 0, \qquad (1)$$

($L[u] = p_{2n}(x) u^{(2n)} + \ldots + p_1(x) u' + p_0(x) u$; коэффициенты $p_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, 2n$) раз непрерывно дифференцируемы, положительны и непрерывны ($x_1 \leqslant x \leqslant x_k$)) и $2n(K-1)$ так называемых K-полилокальных (или K-точечных) условий, которые содержат независимые линейные соотношения между величинами $u^{(r)}(x_i + 0)$ и $u^{(r)}(x_i - 0)$ ($i = 1, 2, \ldots, K$, $r = 0, 1, \ldots, 2n-1$, величины $x_1 - 0$ и $x_K + 0$ исключаются из рассмотрения), автор решает другую дифференциальную систему (B), состоящую из уравнения (1) и из K-полилокальных условий того же типа, относящихся к тем же точкам $x_1, x_2, \ldots, x_K$. При этом предполагается, что среди полилокальных условий системы (B) имеется R таких, которые не вытекают из условий задачи (A), а остальные либо совпадают с условиями задачи (A), либо являются их линейными комбинациями.

Системы полилокальных условий при этом линейные. Целью работы является решение задачи (B) в терминах задачи (A).

Пользуясь формулой Биркгоффа, дающей выражение функции Грина задачи (B) $g(xs; \lambda)$ через функцию Грина задачи (A) $G(xs\lambda)$, автор получает уравнение, позволяющее находить собственные числа задачи (B), а также более простое, чем у Биркгоффа, выражение функции $g(xs\lambda)$ через $G(xs\lambda)$. Далее автор останавливается на случае $R = 1$ и устанавливает, что тогда собственные числа задач (A) и (B) перемежаются, так что если обозначить их соответственно через λ_i^A и λ_i^B ($i = 1, 2, \ldots$), то либо $\lambda_1^A \leqslant \lambda_1^B \leqslant \lambda_2^A \leqslant \lambda_2^B$, либо $\lambda_1^B \leqslant \lambda_1^A \leqslant \lambda_2^B \leqslant \lambda_2^A \leqslant \ldots$ Кроме того, автор доказывает следующую уточненную теорему:

Теорема 3. Пусть s из R граничных условий (B) не содержит производных порядка выше, чем $n-1$. Пусть, кроме того, t из тех R условий, которые содержатся в задаче (A) и не содержатся в задаче (B), также не содержит производных порядка выше, чем $n-1$. Тогда

$$\lambda_{i-R+s}^A \leqslant \lambda_i^B \leqslant \lambda_{i+R-t}^A.$$

В заключение автор приводит метод для нахождения собственных чисел задачи (B), а также применяет свои результаты к исследованию поперечных колебаний балки (случай K-полилокальных условий), где получает, как частный случай, результаты Сейби (Seibel'a).

Всякое дифференциальное уравнение, как известно, может быть сведено к системе уравнений, а для системы уравнений аналогичную задачу решили Рид (случай системы уравнений первого порядка) и Морс (случай системы уравнений второго порядка).

Поэтому сам автор отмечает, что его результаты содержатся в результатах Рида и Морса, но, учитывая характер задачи, формулируются значительно проще и поэтому представляют интерес.

Из текста статьи и из приведенного в конце обширного списка литературы ясно, что автор не знаком со смежными работами, выполненными в СССР.

Среди этих работ назовем статьи М. Г. Крейна (Сообщ. Харьковск. матем. Об-ва (4), 1935, **11** и (4) 1935, **12**, Матем. сб., 1937, **2** (44), 1947, **20** (62), 431—495; и **21** (63), 365—404) совместную работу М. Г. Крейна и Я. Л. Нудельмана (Тр. Одесск. ун-та, 1938, 2) и ряд результатов Я. Л. Нудельмана по теории устойчивости стержневых систем.

Из содержания перечисленных работ следует, в частности, что результаты автора справедливы для значительно более широкого класса уравнений, нежели уравнение (1), так как условие ν-кратной дифференцируемости $p_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) не является необходимым.

Референт (Докл. АН СССР, 1948, **59** (3), 427—430; Тр. Николаевск. кораблестр. Ин-та, 1956, VIII) выразил не только функцию Грина задачи (B) через функцию Грина задачи (A), но и решил аналогичную задачу для всех символов Фредгольма. Правда, в этих двух статьях разобраны случаи билокальных ($K=2$) граничных условий, но соответствующее обобщение не представляет труда, кроме того, не требуется, чтобы задачи (A) и (B) были самосопряженными. Еще раньше (Докл. АН СССР, 1940, **26** (6), 526—530) референт выразил произвольную функцию Грина через функцию Коши и благодаря этому установил ряд осцилляционных теорем для дифференциальных систем произвольного порядка.

П. Д. Калафати

7858. **О колебаниях решений уравнения второго порядка. Зубова А. Ф.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 168—174, 211 (рез. англ.)

Выводятся условия, необходимые и достаточные для колеблемости или неколеблемости решений уравнения $(ru')' + pu = 0$, где r и p — непрерывные вещественные функции. Устанавливаются следующие теоремы:

Теорема 1. Для неколеблемости необходимо и достаточно существование непрерывной дифференцируемой функции $g(x) \neq 0$, удовлетворяющей условию: существуют конечные c и $b \geqslant a$ такие, что

$$0 < \frac{1}{g'(x)} \left[c - \int_b^x g(x) p(x)\, dx \right] \leqslant r(x).$$

Теорема 2. Для того чтобы решения были неколеблющимися, необходимо и достаточно, чтобы

существовала такая непрерывная $\varphi(x)$, что

$$r(x)\varphi(x)-\left[\int_{\xi}(\varphi(x)+p(x))\,dx\right]^2\geqslant 0.$$

Теорема 3. Для колеблемости решений необходимо и достаточно существование $\psi(x)$, имеющей нуль в каждом интервале $(\xi+\infty)$, где ξ — любое, и конечных величин c и $b\geqslant a$ таких, что

$$r(x)\leqslant\frac{1}{\psi'(x)}\left[c-\int_b^x p(x)\psi(x)\,dx\right]<+\infty.$$

Доказательство этих теорем весьма элементарно. Все они также легко выводятся из общих условий Ельшина (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 5, 813—816).

Во второй части работы рассматриваются краевые задачи:

$$(ru')'+[\lambda\rho+p]u=0,$$

$$u(0)=u(\omega),\quad u'(0)=u'(\omega)$$

и $(rv')'+[\mu\rho+p]v=0$; $v(0)=-v(\omega)$, $v'(0)=-v'(\omega)$,

где μ и λ вещественны, а p, $\rho>0$, $r>0$ — периодические периода $\omega>0$ функции.

Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \ldots$ — собственные значения первой задачи, а $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$ — собственные значения второй задачи. По определению, пара $\{r, p\}$ принадлежит n-й зоне устойчивости L_n, если

$$\lambda_n<0<\mu_{n+1}\ (n\text{ — четное}),$$

$$\mu_{n+1}<0<\lambda_n\ (n\text{ — нечетное}),$$

и принадлежит n-й зоне неустойчивости, если

$$\begin{matrix}\lambda_{n-1}\neq\lambda_n, & \lambda_{n-1}\leqslant 0\leqslant\lambda_n\\ \mu_n\neq\mu_{n+1}, & \mu_n\leqslant 0\leqslant\mu_{n+1}.\end{matrix}\qquad(n\text{ — четное}),$$

Выводятся условия, при которых пары $\{r; p\}$ принадлежат L_n или l_n; эти условия являются некоторым обобщением результатов Якубовича и Жуковского.

В. А. Кондратьев

7859. **Асимптотическое поведение решений одной нелинейной краевой задачи теории пограничного слоя. Гиль Г. В., Мышкис А. Д.**, Докл. АН СССР, 1957, 112, № 4, 599—602

Исследуется асимптотическое поведение при $t\to\infty$ решения краевой задачи

$$y'''(t)+2y(t)y''(t)+2\beta(k^2-y'^2(t))=0\quad(0\leqslant t<\infty),$$

$$y(0)=y'(0)=0,\qquad(1)$$

$$y'(\infty)=k\quad(\beta\geqslant 0,\ k>0).$$

Доказана теорема: Решение краевой задачи (1) и его первая и вторая производные имеют при $t\to\infty$ следующее асимптотическое представление:

$$y(t)=kt-C+t^{-2-2\beta+o(1)}e^{-kt^2+2Ct},$$

$$y'(t)=k-t^{-1-2\beta+o(1)}e^{-kt^2+2Ct},$$

$$y''(t)=t^{-2\beta+o(1)}e^{-kt^2+2Ct},$$

где $C>0$ — некоторая константа (равная $\lim_{t\to\infty}(kt-y(t))$. Доказательство основано на изучении свойств решения краевой задачи для уравнения второго порядка к которой сводится задача (1) заменой $v(y)=k^2-y'^2$ $(y_0=y(t_0)\leqslant y<\infty)$. Величина константы C или ее оценка неизвестны.

Р. С. Гусарова

От редакции. По сообщению автора редакция отмечает следующие имеющиеся в статье опечатки: на стр. 600, 11 строка снизу вместо «не стремится» должно быть «стремится», 4 строка снизу, вместо $y\to\infty$ должно быть $t\to\infty$; на стр. 601 в левой части формулы (5) вместо z должно быть z'; на стр. 602 в последнем интеграле вместо $C\tau$ должно быть $2C\tau$.

7860. **Аналитическая зависимость от параметров почти периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Шеффер** (Analytische Parameterabhängigkeit der fastperiodischen Lösungen von nichtlinearen Differentialgleichungen. Schäffer Juan Jorge), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 2, 204—236 (нем.)

Рассматривается система

$$dx/dt=f(x,\ p(t,\ \lambda)),\qquad(1)$$

где x — n-мерный вектор, $p(t,\lambda)$ — m-мерный вектор, почти периодический по t и аналитический по λ, $f(x, y)$ — аналитическая функция. Предположим, что при $\lambda=0$ система имеет почти периодическое решение $x_0(t)$ и пусть $dy/dt+A(t)y=0$ — соответствующая система уравнений в вариациях. Если система

$$dz/dt+A(t)z+q(t)=0\qquad(2)$$

имеет для всякого ограниченного $q(t)$ по крайней мере одно ограниченное при $t\geqslant 0$ решение, то существует $\gamma_0>0$ такое, что при $|\lambda|\leqslant\gamma_0$ система (1) имеет почти периодическое решение $x(t,\lambda)$, аналитическое по λ. Существование доказывается методом последовательных приближений, причем используется тот факт, что в условиях теоремы система (2) имеет для любого почти периодического $q(t)$ единственное почти периодическое решение, для которого справедлива оценка $\|z(t)\|\leqslant M\|q(t)\|$, где M не зависит от $q(t)$. Аналогичный результат опубликован И. Г. Малкиным (РЖМат, 1956, 417).

A. Halanay

7861. **Условия апериодичности в линейных системах. Фуллер** (Conditions for aperiodicity in linear systems. Fuller A. T.), Brit. J. Appl. Phys., 1955, 6, № 5, 195—198 (англ.)

Рассматриваются условия апериодичности решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предполагая все корни характеристического уравнения системы простыми, автор устанавливает, что необходимым и достаточным условием апериодичности является вещественность всех корней характеристического уравнения. Используя результаты Труди (Trudi N., Teoria de determinanti, 1862), автор приводит условия, необходимые и достаточные для вещественности всех корней характеристического уравнения, состоящие в положительности $(n-1)$ определителей специального вида, составленных из коэффициентов уравнения.

Отмечается некоторая аналогия указанных условий с условиями Рауса—Гурвица.

В. А. Плисс

7862. **О существовании периодического решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Вольпато** (Sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Volpato Mario), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1956, 25, 371—385 (итал.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + P(t, x, \dot{x})\,x = Q(t, x, \dot{x}), \qquad (1)$$

$$[\dot{x} = dx/dt,\ \ddot{x} = d^2x/dt^2].$$

Доказана следующая теорема:

Если 1) $P(t, x, \dot{x})$, $Q(t, x, \dot{x})$ — функции действительного переменного t и действительных переменных x, $\dot{x}$, в некоторой области непрерывны и по отношению к t периодические с периодом ω ($\omega > 0$); 2) существуют две функции $p(t)$, $P(t)$ [$p(t) \leqslant P(t)$], не равные тождественно нулю, непрерывные и периодические с периодом ω, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant p(t) \leqslant P(t, x, \dot{x}) \leqslant P(t),$$

$$\omega \int_0^\omega P(t)\,dt \leqslant 4;$$

3) функция $Q(t, x, \dot{x})$ ограничена. Тогда существует по крайней мере одно периодическое решение уравнения (1) с периодом ω. С. Н. Шиманов

7863. **О существовании и единственности периодического решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.** **Вольпато** (Sull' esistenza e unicità di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Volpato Mario), Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII, 1953—1954, 3, 99—111 (итал.; рез. франц.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + k^2x = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \qquad (1)$$

где f непрерывна, имеет период T относительно t, $k > 0$, $kT \neq 2n\pi$, $f(t, c, 0, 0) \not\equiv k^2c$ ни при каком постоянном c. Если для любого ρ существует такое $M(\rho)$, что в области

$$|x| \leqslant \rho/k,\ |\dot{x}| \leqslant \rho,\ |\ddot{x}| \leqslant k\rho + M(\rho), \qquad (2)$$

имеем $|f(t, x, \dot{x}, \ddot{x})| \leqslant M(\rho)$, причем $ATM(\rho) \leqslant \rho$ при достаточно большом ρ, где $A = |\operatorname{cosec}(kT/2)| + 1$, и если f удовлетворяет условию Липшица по x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ с коэффициентом $L(t)$, причем

$$(k + 1 + 1/k)\,A \int_0^T L(t)\,dt + \sup L(t) < 1,$$

то уравнение (1) имеет единственное решение периода T.

Теорема доказывается путем применения принципа неподвижной точки к множеству функций периода T, удовлетворяющих неравенству (2) и обладающих определенным модулем непрерывности второй производной.

Аналогичная теорема (при менее жестких ограничениях) формулируется для случая, когда f зависит только от t, x, $\dot{x}$. А. Ф. Филиппов

7864. **О некоторых периодических решениях нелинейного дифференциального уравнения. Случай вынужденных колебаний. Влияние частоты.** **Фор** (Sur certaines solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires. Cas des vibrations forcées. Influence de la fréquence. Faure Robert), Ann. mat. pura ed appl., 1956, 42, 165—188 (франц.)

Исследуются условия существования периодических решений уравнения

$$y'' + f(y)\,y' + g(y) = e(t) \qquad (1)$$

и изучаются некоторые свойства этих решений.

Пусть в уравнении (1) $e(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$, $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, $f(y)$ и $g(y)$ — аналитические, $f(k) \neq 0$, $g'(k) \neq 0$ при таком k, что $g(k) = a_0$. Если $\sum_{n \neq 0} |a_n| = \eta$ достаточно мало (дана оценка требуемой малости), или если η — любое, а ω — достаточно велико, то существует периодическое решение уравнения (1), которое разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вместе с первой и второй производными. Если $\eta \to 0$ (при $\omega = \text{const}$), или $\omega \to \infty$ (при $\eta = \text{const}$), то амплитуды периодического решения его первой производной стремятся к нулю.

Утверждение о существовании периодического решения справедливо и в том случае, когда $f(k) = 0$, $g(k) = a_0$, $g(y) \equiv Cy$, $C \neq n^2\omega^2$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ (т. е. нет резонанса).

Указаны некоторые случаи, когда периодическое решение устойчиво. Автор указывает, что изложенные теоремы имеют место и для дифференциально-разностного уравнения, полученного заменой $y(t)$ на $y(t + h_1)$ и $y(t + h_2)$ во втором и третьем членах левой части уравнения (1). А. Ф. Филиппов

7865. **Ограниченность и периодичность решений обобщенного уравнения Льенара.** **Утц** (Boundedness and periodicity of solutions of the generalized Liénard equation. Utz W. R.), Ann. mat. pura ed appl., 1956, 42, 313—324 (англ.)

Исследуется поведение при $t \to \infty$ решений уравнения

$$x'' + f(x, x') + g(x) = e(t) \qquad (1)$$

при различных предположениях относительно функций f, g, e. Доказаны теоремы:

1) Если $e(t) \equiv 0$, $yf(x, y) \geqslant 0$, $g(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале, $\int_0^{\pm\infty} g(x)\,dx = \pm\infty$, то при $t \to +\infty$ каждое решение ограничено вместе со своей производной.

2) Если функции f, g, e непрерывны, $|e(t)| < B$, $\left|\int_0^t e(t)\,dt\right| < A$; $f(x, x') \equiv \varphi(x)\,x'$, где $\varphi(x) \geqslant 0$ для $|x| > M > 0$; $xg(x) > 0$ для $x \neq 0$, $|g(x)| > C > B$ для $|x| > N > 0$, и если решение $x(t)$ уравнения (1) монотонно при больших t, то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Есть и другие результаты подобного рода. Приведены также условия, при которых все решения уравнения (1), где $e(t) \equiv 0$, расположенные в окрестности начала координат на фазовой плоскости, являются замкнутыми кривыми, симметричными относительно оси y; дана оценка величины этой окрестности. Опечатка: стр. 322, строка 2, надо $g(x) > 0$.

А. Ф. Филиппов

7866. **Критерий параметрической неустойчивости для линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.** **Гамбилл** (Criteria for parametric instability for linear differential systems with periodic coefficients. Gambill Robert A.), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 1-2, 37—43 (англ.)

В системе

$$\ddot{y}_j + \sigma_j^2 y_j + \lambda \sum_{h=1}^{n} \varphi_{jh}(t)\,y_h = 0,\ j = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

$\varphi_{jh}(t)$ — действительные периодические функции периода $T = 2\pi/\omega$ со средним значением, равным нулю, разлагающиеся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье и

$$m\omega \neq \sigma_j \pm \sigma_n \quad (j, h = 1, \ldots, n,\ m = 0, 1, \ldots). \qquad (2)$$

В скалярном случае, $n=1$, при выполнении указанных условий все решения уравнения Хилла

$$\ddot{y}+\sigma^2 y+\lambda\varphi(t)\,y=0$$

будут ограничены при $-\infty<t<\infty$ при всех достаточно малых λ. Условие (2) означает в этом случае $m\omega\neq 2\sigma$. Автор отмечает, что как показано Чезари (Atti Accad. Halia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1940, **11**, № 6, 633—692) для системы (1) аналогичное утверждение неверно. Ограниченность решений системы (1) при всех достаточно малых λ будет иметь место, если дополнительно выполнены условия: либо

$$\varphi_{jh}(t)=\varphi_{hj}(t), \tag{3}$$

либо

$$\varphi_{jh}(-t)=\varphi_{jh}(t), \tag{4}$$

либо некоторое условие, объединяющее в определенном смысле условия (3) и (4).

Автор приводит формулы, связывающие характеристические показатели системы (1), по которым вычисляются некоторые выражения P_{kj}. Если $P_{kj}\neq 0$, то при любом достаточно малом λ система (1) имеет неограниченные при $t\to\infty$ решения.

Примечание референта. Утверждение об ограниченности решений системы (1) при выполнении условий (2), (3) или (2), (4) содержится в результатах Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892). При этом доказательство Ляпунова намного проще доказательства Чезари. Функции φ_{jh} могут быть любыми периодическими, интегрируемыми по Лебегу на $(0, T)$. При выполнении условия (3) вместо условия (2) можно потребовать лишь $m\omega\neq\sigma_j+\sigma_h$ (РЖМат, 1956, 2189).

В. А. Якубович

7867. Об асимптотической устойчивости по первому приближению. Гермаидзе В. Е., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 1, 133—135

Рассматривается система уравнений

$$dx_s/dt=X_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)+R_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

$$(s=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где функции X_s определены, непрерывны в области

$$\|x\|<H,\quad 0\leqslant t<\infty\qquad (\|x\|=\sup\{|x_1|,\ \ldots,|x_n|\})$$

и удовлетворяют в этой области условиям Липшица

$$|X_s(t,\ x'')-X_s(t,\ x')|<L\,\|x''-x'\|.$$

Функции R_s удовлетворяют неравенству $|R_s|\leqslant\varphi(t)\|x\|$. Если решения укороченной системы (1) (при $R_s=0$) удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0,\ t_0,\ t)\|\leqslant B\,\|x_0\|\exp\{-\varkappa(t-t_0)\}\ \text{ при }\ t\geqslant t_0$$

$$(B>0,\ \varkappa=\text{const})$$

и существует по крайней мере одно $T>0$, такое, что

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(\xi)\,d\xi<\gamma\quad\text{для всех }\ t_0>0, \tag{2}$$

где число $\gamma>0$ оценивается по L, B и $\varkappa$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Доказательство опирается на второй метод Ляпунова исследования устойчивости и использует идею Н. Г. Четаева варьирования функций Ляпунова (РЖМат, 1956, 8807 К). Показывается что некоторые известные теоремы устойчивости по первому приближению (библиография которых приведена в заметке) обобщаются доказанным критерием устойчивости при возмущающих членах R_s, малых в среднем (2). Оценка числа $\gamma>0$ по L, α и B, данная в заметке, в общем случае улучшена быть не может.

Н. Н. Красовский

7868. Об одном методе построения функций Ляпунова. Лебедев А. А., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 1, 121—124

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt=p_{i1}(t)\,x_1+\ldots+p_{in}(t)\,x_n\ (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ — периодические непрерывные функции. В начале заметки описываются известные методы построения функций Ляпунова — квадратичных форм—

$$B(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\tfrac{1}{2}\sum\beta_{jk}(t)\,x_jx_k$$

для системы (1) (Четаев Н. Г. а) РЖМат, 1956, 8807 К; б) Прикл. матем. и механ., 1945, 9, вып. 3, 193—196). Во второй основной части заметки выводятся оценки, при выполнении которых для доказательства устойчивости решений системы (1) можно использовать функцию Ляпунова $V=\varphi(t)\,B(t, x_1,\ \ldots,\ x_n)$, где коэффициенты $\beta_{jk}(t)$ формы B определяются из уравнений

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}[p_{sk}\beta_{si}+\beta_{sk}p_{si}]\frac{\partial B}{\partial x_s}=-\delta_{ik}.$$

Примечание. В заметке отсутствуют ссылки на другие работы (РЖМат, 1956, 8802; 1957, 3980), где также использована идея варьирования функций B и получены аналогичные результаты (см. выше ссылку б)). Некоторые обозначения в заметке неудачны, например в (3) и (7) при одинаковом написании левых частей равенств, правые части равенств различны.

Н. Н. Красовский

7869. Об ограниченности монотонных решений системы линейных дифференциальных уравнений. Демидович Б. П., Успехи матем. наук, 1947, **12**, № 2, 143—146

Дана система

$$dx/dt=P(t)\,x.$$

Доказывается, что из условия

$$\left|\int_{t_0}^{\infty}P(t)\,dt\right|<\infty\cdot I,$$

где I — единичная матрица, и предположения, что решение системы монотонно, вытекает, что оно ограничено.

На примере установлено, что заключение теоремы перестает быть верным, если не предполагать монотонности решения.

В. В. Немыцкий

7870. Об устойчивости движения некоторых материальных систем, описываемого дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами. Лесин А. Д., Тр. Студ. научно-техн. о-ва, МВТУ им. Баумана, 1957, **3**, 108—131

Даются подробные определения разных видов устойчивости: ляпуновской, при непрерывно действующих возмущениях, технической. Далее изучаются линейные системы второго порядка с возмущениями. Исследование в действительности носит весьма частный характер, так как заранее считаются выполнимыми некоторые специальные преобразования. Предполагается также

соблюдение условий типа сохранения знака у коэффициентов окончательного уравнения второго порядка. Результаты не новы. В качестве примера рассматривается устойчивость вертикального движения оперенной мины в однородной атмосфере. Р. Э. Виноград

7871. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Курцвейль Ярослав, Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 2, 217—259

Рассматривается система уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Содержанием работы является подробное доказательство обращения теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 85) при единственном условии, что правые части дифференциальных уравнений (1) — непрерывные функции. Задача о существовании функции Ляпунова V решается в предположении сильной устойчивости нулевого решения системы (1), что является обобщением понятия асимптотической устойчивости по Ляпунову и охватывает, в частности, случай устойчивости в целом (при дополнительном условии равномерности устойчивости). Доказывается существование функции $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющей непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам. Самостоятельный интерес представляет приведенная по ходу доказательства теорема об аппроксимации — о возможности сглаживания функций V, удовлетворяющих локально условиям Липшица (без нарушения свойств V, как функции Ляпунова). Краткое сообщение о некоторых результатах этой работы опубликовано в заметке автора (РЖМат, 1956, 6574).

Н. Н. Красовский

7872. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. (Продолжение). Курцвейль Ярослав, Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 4, 455—484 (рез. англ.)

Продолжение статьи (реф. 7871.). Здесь сохраняется та же проблематика и терминология, что и в первой части работы. Доказывается теорема: Если нулевой интеграл уравнения $dx/dt = f(x, t)$ сильно устойчив в G, то существует гомеоморфное отображение $h(x)$ множества G на сферу R. Отображение $h(x)$ обладает непрерывными производными всех порядков по координатам вектора x, и якобиан этого отображения отличен в каждой точке от нуля. Приводятся следствия этой теоремы. Изложение существенно связано с результатами первой части работы о функциях Ляпунова V. В добавлении показывается, как из результатов автора получаются в усиленной форме известные теоремы обращения теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а также приводится усиление теоремы И. Г. Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях (РЖМат, 1955, 211). Именно, если функция $f(x, t)$ — периодическая по t (или — если $f(x)$ не зависит явно от t) и если тривиальное решение $x = 0$ уравнения $dx/dt = f(x, t)$ сильно устойчиво, то оно устойчиво и при постоянно действующих возмущениях.

Н. Н. Красовский

7873. Об устойчивости в целом одного класса нелинейных систем автоматического регулирования. Скачков Б. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 46—55

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \dot\eta_1 &= b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + \bar n_1\xi, \\ \dot\eta_2 &= b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + \bar n_2\xi, \\ \xi &= f(\sigma), \quad \sigma = \bar p_1\eta_1 + \bar p_2\eta_2 - \xi, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $f(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решений, кроме того $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$ и $f(0) = 0$. А. И. Лурье показал (Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М., Гостехиздат, 1951), что при определенных условиях для системы (1) можно построить функцию Ляпунова вида

$$V = \int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma + B_1\dot\eta_1^2 + B_2\dot\eta_1\dot\eta_2 + B_3\dot\eta_2^2. \qquad (2)$$

Для доказательства асимптотической устойчивости системы (1) в целом при помощи функции V следует предполагать, что интеграл в правой части (2) расходится при $\sigma = \pm\infty$. В реферируемой работе показывается, что в случае, когда система допускает функцию Ляпунова V (2), асимптотическая устойчивость в целом может быть установлена дополнительными рассуждениями качественного характера без предположения о расходимости интеграла $\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma$. Эти рассуждения проводятся по методу, предложенному В. А. Плиссом (РЖМат, 1956, 2981).

Н. Н. Красовский

7874. Устойчивость при параметрических возмущениях. Кузьмин П. А., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 1, 129—132

Обсуждается постановка задачи устойчивости при постоянно действующих возмущающих силах. Приводятся соображения в пользу рассмотрения лишь постоянно действующих возмущений, стесненных структурными ограничениями, соответствующими физическим свойствам рассматриваемой системы. В частности, если совокупность движений описывается дифференциальными уравнениями

$$dy_s/dt = f_s(t, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_k)$$

(a_j — постоянные параметры), то устойчивость невозмущенного движения $y_s = \varphi_s$ (при $a_j = \alpha_j$) нужно исследовать относительно отклонений $x_s = y_s - \varphi_s(t)$

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum \frac{\partial f_s}{\partial \varphi_i} x_i + \sum \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_i}\varepsilon_i + R_s(t, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$$

при учете параметрических возмущений $\sum(\partial f_s/\partial\alpha_i)\varepsilon_i, R_s$, величина которых определяется отклонениями $\varepsilon_i = a_i - \alpha_i$ параметров, а структура — характером зависимости функций f_s от параметров. Новых конкретных результатов по решению таких задач не приводится. Высказывается предположение о том, что методы исследования устойчивости при параметрических возмущениях следует искать среди теорем, подобных общим теоремам Ляпунова, скорее его второго метода.

Есть незначительные опечатки, например, в (4) надо a_k, но не a_n. Н. Н. Красовский

7875. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве. Рехлицкий З. И., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 29—32

Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздываниями времени в банаховом пространстве $\mathcal{E}$

$$dy/dt - A(t)\,y(t-a) = x(t) \quad (0 \leqslant t < \infty,\ a > 0), \qquad (1)$$

где $y(t) \in \mathcal{E}$, $x(t) \in \mathcal{E}$, $A(t)$ — при фиксированном t линейный, ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{E}$, имеющий сильную производную $A'(t)$, $\lim \| A'(t) \| = 0$ при $t \to \infty$ и такой, что из всякой последовательности $\{A(t_n)\}$ можно выделить сильно сходящуюся часть. Доказывается условие ограниченности решения $y(t)$ уравнения (1): для того чтобы краевая задача (1) при $y(t) = \varphi(t)$ для $t \leqslant 0$ имела ограниченное реше-

ние при всяких непрерывных ограничениях $x(t)$ и $\varphi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого предельного оператора A_{∞}, порожденного семейством $\{A(t)\}$ при $t \to \infty$ все корни z уравнения

$$1 - ze^{\lambda - az} = 0$$

для любого λ из спектра A_{∞} лежали вне единичного круга.

Работа продолжает исследования М. Г. Крейна (Успехи матем. наук, 1948, 3, вып. 1, 166—169), и М. А. Рутмана (РЖМат, 1956, 6697; 1957, 2330).

Н. Н. Красовский

7876 К. **Дифференциальные уравнения. Филлипс** (Equações diferenciais. (Differential equations). Phillips H. B. Trad. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1956, 160 p., 180, 00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 6, 289 (порт.)

7877 Д. **Теоремы существования и оценки числа предельных циклов для некоторых уравнений нелинейных колебаний. Чжан Чжи-фэн.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

7878 Д. **Некоторые вопросы теории устойчивости нелинейных систем. Красовский Н. Н.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ин-т механ. АН СССР, М., 1957

7879 Д. **Об одном специальном линейном дифференциальном уравнении второго порядка. Сканави М. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1957

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

7880. **Уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Жермен** (Équations du second ordre à deux variables indépendantes. Germain P.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 21—44 (франц.)

Краткое изложение теории уравнений в частных производных. Библ. 12 назв. Д. М. Эйдус

7881. **К поведению на бесконечности решений линейного уравнения в частных производных второго порядка. Блондель** (Sur le comportement à l'infini des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Blondel Jean-Marie), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 12, 833—835 (франц.)

Рассматривается решение уравнения $\partial^2 z/\partial x \partial y + A(x, y) z = 0$, удовлетворяющее условиям $z(x, 0) = \varphi(x)$, $z(0, y) = \psi(y)$, где $0 < \alpha < A(x, y) < \beta$ (α, β — постоянные). Будем говорить, что $A \in H$, если $A \in C_1$ и имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\int_0^{+\infty} \sup_{0 \leqslant y \leqslant Y} \left[\frac{\partial A}{\partial x}\right]^+ dx < \alpha, \quad \int_0^{Y} \sup_{x \geqslant 0} \left[\frac{\partial A}{\partial y}\right]^- dy < \frac{\alpha^2}{\beta},$$

где $Y > 0$ — некоторая постоянная. Точно так же $A \in K$, если $A \in C_1$ и имеет место

$$\int_0^{Y} \sup_{x \geqslant 0} \left[\frac{\partial A}{\partial y}\right]^+ dy < \alpha \text{ или } \int_0^{+\infty} \sup_{0 \leqslant x \leqslant Y} \left[\frac{\partial A}{\partial x}\right]^- dx < \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Теорема 1. Если $\varphi \in C_1$ в $[0, -\infty)$, $\varphi' \in L_1[0, +\infty)$, $\psi \in C_1$ в $[0, Y]$, $A \in H \cap K$, то $|z(x, y)|$ ограничена для $x \geqslant 0$, $y \in [0, Y/2]$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, причем $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = l$. Обозначим через $Z(u, v, x, y)$ такое решение уравнения $\partial^2 Z/\partial u \partial v + A(u, v) Z = 0$, что $Z = 1$ на прямых $u = x$ и $v = y$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} [z(x, y) - lZ(0, 0, x, y)] = 0 \text{ для } y \in [0, Y/2].$$

Кроме того, даны и другие теоремы того же типа. Подробные доказательства отсутствуют. Д. М. Эйдус

7882. **О разрешимых расширениях линейных дифференциальных операторов с частными производными первого порядка. Дезин А. А.**, Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 1, 11—14

В конечной области Ω n-мерного евклидова пространства рассматриваются операторы l вида

$$v = lu \equiv A^{\rho} \partial u/\partial x_{\rho} + Bu.$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $v = (v_1, \ldots, v_M)$, A^{ρ} ($\rho = 1, \ldots, n$) и B — прямоугольные матрицы, $A^{\rho}(x) \in C_1(\overline{\Omega})$, $B(x) \in C(\overline{\Omega})$. Оператор l вместе с однородными граничными условиями (довольно общего вида), рассматриваемый на $u \in C_1(\overline{\Omega})$, определяет оператор L из гильбертова пространства $H = L_{2,N}(\Omega)$ вектор-функции u в пространство $H^* = L_{2,M}(\Omega)$ вектор-функций v. Вводится сильное и слабое расширения L (РЖМат, 1957, 1451). В связи с этими указаны некоторые ортогональные разложения H и H^*, в частности, одно разложение H, обобщающее классическое разложение вектора на соленоидальный, потенциальный и гармонический. Отмечено, что для широкого класса областей слабое и сильное расширение L совпадают. Рассмотрен вопрос о существовании разрешимых в смысле М. И. Вишика (Тр. Моск. матем. об-ва, 1952, 1, 187—246) граничных задач для уравнения $lu = v$. В случае $N = M$ указаны два достаточных условия существования таких задач. Доказательства отсутствуют.

М. Ш. Бирман

7883. **Теорема Якоби для системы уравнений, инволюционных по Дарбу—Ли. Рахайский** (Théorème de Jacobi pour le système d'équations en involution de Darboux—Lie. Rachajsky Borivoj), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 1-2, 7—14 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Пусть дана система инволюционных уравнений с частными производными второго порядка

$$r + f(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

$$t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0$$

и найден полный интеграл ее

$$z = V(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4). \qquad (1)$$

Тогда уравнения характеристик этой системы имеют решения в виде интеграла (1) и следующих равенств:

$$p = V_x, \quad q = V_y, \quad s = V_{xy},$$

$$a \equiv \frac{\partial(V, V_x, V_y)}{\partial(c_i, c_j, c_k)} : \frac{\partial(V, V_x, V_y)}{\partial(c_i, c_l, c_k)} = c_5,$$

если $a_x \neq 0$, $a_y \neq 0$. И. С. Аржаных

7884. **О единственности решения уравнений гидродинамики. Годунов С. К.**, Матем. сб., 1956, **40**, № 4, 467—478

Рассматривается вопрос единственного решения системы нелинейных уравнений газовой динамики

$$\partial u/\partial t + \partial P(v, F)/\partial x = 0, \quad \partial v/\partial t - \partial u/\partial x = 0,$$
$$\partial(E + u^2/2)/\partial t + \partial pu/\partial x = 0 \qquad (1)$$

при наличии разрывов. Сперва доказывается теорема единственности обобщенного решения линейной системы

$$\partial u/\partial t - \partial [A(x, t) v]/\partial x = 0, \ \partial v/\partial t - \partial u/\partial x = 0, \quad (2)$$

с положительным коэффициентом $A(x, t)$, имеющим линии разрыва в рассматриваемой области $t \geqslant 0$, ограниченной отрезком прямой $t = 0$ и дугой Γ_2, удовлетворяющей некоторым условиям. Теорема единственности для системы (2) при заданных u, v на отрезке $t = 0$ доказывается в предположении существования непрерывного решения сопряженной системы, принимающего на 1_2 непрерывные значения, выражаемые некоторым образом через u и v. Выводятся условия существования решения сопряженной системы дающие одновременно условия единственности решения системы (2).

Используя условия единственности решения системы (2), автор рассматривает единственность решения нелинейной системы

$$\partial u/\partial t + \partial p(v)/\partial x = 0, \quad \partial v/\partial t - \partial u/\partial x = 0, \quad (3)$$

приведя ее к линейной системе применением известного приема Адамара, а затем доказывает возможность распространения доказательства теоремы единственности решения системы (3) на систему (1).

Автор отмечает, что полученное им условие единственности эквивалентно условию $\int_C S dx \leqslant 0$, где C — любой замкнутый контур, S — энтропия.

Д. Е. Долидзе

7885. Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с многими независимыми переменными при задании начальных условий на двух гиперплоскостях. Киро С. Н., Тр. Одесск. ун-та, 1956, **146**, сер. матем. н., № 6, 25—46

Рассматривается система уравнений

$$f_k(x_1, \ldots, x_n; \ u_1, \ldots, u_{m+l}; \ \partial u_1/\partial x_1, \ldots, \partial u_1/\partial x_n; \ \ldots;$$

$$\partial u_{m+l}/\partial x_1, \ldots, \partial u_{m+l}/\partial x_n) = 0 \ (k = 1, \ldots, m + l),$$

где функции f_k аналитичны по всем своим аргументам в окрестности некоторой системы их начальных значений $x_1^0, \ldots, \partial u_{m+l}^0/\partial x_n$. Доказывается, что при некоторых условиях (естественных, но очень громоздких) существует и при том единственное решение $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, m + l)$, аналитическое в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$u_h(x_1^0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \varphi_h(x_2, x_3, \ldots, x_n) \ (h = 1, \ldots, m),$$

$$u_{m+j}(x_1, x_2^0, x_3, \ldots, x_n) = \psi_j(x_1, x_3, \ldots, x_n) \ (j = 1, \ldots, l).$$

Это есть обобщение результатов С. Л. Соболева (Матем. сб., 1931, **39**, № 3-4, 107—147), рассмотревшего случай $n = 2$. В основе лежит метод мажорации Н. М. Гюнтера (Матем. сб., 1924, **32**, № 1, 26—48), обобщенный соответствующим образом. М. К. Фаге

7886. О задаче Коши для некоторых систем линейных уравнений с частными производными. Харамонов С. А., Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1956, вып. 45, 87—97

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \leqslant M} A_{l_j}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^k U_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \Phi_l(t, x_1, \ldots, x_n). \quad (1)$$

$$U_l|_{t=t_0} = f_l(x_1, \ldots, x_n), \quad (2)$$

$$l = 1, \ldots, N, \ k = k_1 + \ldots + k_n, \ t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

$|x_1| < \infty, \ldots, |x_n| < \infty$, M — четное. Пусть $\nu = s + i\tau$, s, τ — действительные числа, $|s| > |\tau|$. По определению автора, система (1) удовлетворяет условию (ν), если при $t \in [0, T]$ все собственные значения матрицы

$$\nu^M \Big[\sum_{k=M} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \Big]_{i, j=1}^{N} - \lambda E$$

лежат в левой комплексной полуплоскости для любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$. Для систем, удовлетворяющих условию (ν), показывается существование решения задачи Коши (1), (2), в классе целых функций экспоненциального типа.

Примечание референта. В работе очень много опечаток. Некоторые доказательства излишне сложны. Заметим, например, что после замены переменных $\tau x_j = i\nu x_j$, $j = 1, \ldots, n$, системы, удовлетворяющие условию ν, в терминологии автора, превращаются в системы параболические в смысле И. Г. Петровского.

В. Э. Лянце

7887. Об одном способе решения линейных краевых задач самосопряженного типа. Слезингер И. Н., Прикл. матем. и механ., 1956, **20**, № 6, 704—713

Приводится обычная формулировка энергетического вариационного метода для одного класса самосопряженных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка. В связи с известными в литературе результатами (Zaremba S., Bull. Internat. Acad. sci. Cracovie, 1908, № 1, 1—29; Крейн М. Г., Матем. сб., 1948, **20**, вып. 3, 431—495 и др.) отмечается, что знание решения одной граничной задачи может в некоторых случаях облегчить решение других граничных задач для того же дифференциального уравнения. Эти соображения применены к расчету жестко заделанной прямоугольной пластинки при некоторых видах нагрузки с использованием решения для шарнирно опертой пластинки.

Автор отмечает связь изложенного им подхода с вариационным методом, предложенным для бигармонической задачи З. Х. Рафальсоном (Докл. АН СССР, 1949, **64**, № 6, 799—802).

М. Ш. Бирман

7888. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. Ландис Е. М., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 5, 640—643

Рассматривается уравнение

$$\sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - cu = 0, \quad (1)$$

в котором a_{ik} дважды непрерывно дифференцируемы, имеют непрерывные первые производные, все коэффициенты и указанные производные ограничены по модулю единицей, причем $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k > \alpha > 0$ при $\sum \xi_i^2 = 1$.

В этих предположениях устанавливается, что если решение уравнения (1) на круговом участке радиуса a единичного шара n-мерного пространства удовлетворяет неравенствам $|u| \leqslant \varepsilon$, $|\partial u/\partial n| \leqslant \varepsilon$, а всюду в указанном шаре $|u| \leqslant 1$, то в центре шара имеет место оценка

$$|u(0)| < \varepsilon a^c, \quad (2)$$

где постоянное C не зависит от ε и a.

Приводится три следствия из этой оценки, относящихся к единственности решения задачи Коши и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий.

Неравенство, более точное, чем (2), было получено ранее М. М. Лаврентьевым применительно к уравнению Лапласа (РЖМат, 1957, 1450). С. Н. Мергелян

7889. О единственности в начальной задаче Коши для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка. Хейниц (Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Heinz Erhard. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. II. a, 1955, № 1, 12) (нем.)

Теорема 1. Пусть $u(x)=u(x_1, \ldots, x_n)$ — дважды гладкая при $|x-a|\leqslant R>0$ вещественная функция, равная нулю в окрестности точки $x=a$ и сферы $|x-a|=R$, а α вещественно. Тогда

$$\int_{|x-a|\leqslant R}|x-a|^{\alpha-2}u(x^2)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant 4(n-2)^{-2}R^2\int_{|x-a|\leqslant R}|x-a|^{\alpha}(\Delta u)^2\,dx,$$

$$\int_{|x-a|\leqslant R}|x-a|^{\alpha}(\operatorname{grad}u)^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant 2R^2\int_{|x-a|\leqslant R}|x-a|^{\alpha}(\Delta u)^2\,dx$$

(при $n=2$ надо заметить $4(n-2)^{-2}$ на 7).

Доказательство элементарно и основано на разложении u и Δu при фиксировании $|x-a|$ в ряд по n-мерным сферическим функциям. Из этой теоремы выводится.

Лемма. Если $w(x)$ — дважды гладкая функция в области D, в которой $(\Delta w)^2\leqslant M(w^2+|\operatorname{grad}w|^2)$, то множество $W=0$ не содержит внутренних точек.

Отсюда сразу следует

Теорема 2. Если функция $F(x_1, \ldots, x_n, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ определена для $x\in D$ при всех $u_0, \ldots, u_n$ и удовлетворяет в каждой области $|u_0|+\ldots+|u_n|\leqslant K$ по $u_0, \ldots, u_n$ условию Липшица (с константой, зависящей только от K), то любые два дважды гладкие решения в D уравнения $\Delta u=F(x_1, \ldots, x_n, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$, совпадающие вместе с первыми производными на произвольном куске гладкой поверхности, совпадают в D тождественно.

В случае, когда F не зависит от $\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n$, последний результат получен Мюллером (РЖМат, 1955, 5036). При несколько большей гладкости функции F теорема 2 становится частным случаем общего утверждения независимо, другим путем, доказанного Е. М. Ландисом (реф. 7888). А. Д. Мышкис

7890. О единственности продолжения решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Аронштайн (Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre. Aronszajn Nachman), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 6, 723—725 (франц.)

Рассматривается неравенство

$$|Au(x)|\leqslant M\left[\sum_k\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x^k}\right|+\right.$$

$$\left.+|u(x)|\right]\quad(x\in D,\ M-\text{const}),\qquad(1)$$

где A — линейный эллиптический оператор второго порядка, определенный на функциях из $C^2(D)$ (D — некоторая область в E^n). Коэффициенты главной части A имеют вторые непрерывные производные, удовлетворяющие условию Липшица в D. Остальные коэффициенты A ограничены. Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы: Если функция $u\in C^2(D)$ обращается в нуль бесконечного порядка в некоторой точке $x_0\in D$ и удовлетворяет неравенству (1), то u тождественна нулю во всей D.

Автор указывает, что при доказательстве используется неравенство, аналогичное неравенству Хейнца (реф. 7889). Рассматривается некоторое обобщение сформулированной теоремы. В заключение отмечается, что полученный результат позволяет доказать теорему единственности задачи Коши для некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Указывается на возможность применения результата к некоторым нелинейным уравнениям, например уравнениям вида

$$\operatorname{Det}\{\partial^2u/\partial x^i\partial x^j\}=F(x,\ u,\ \partial u/\partial x).$$

А. И. Кошелев

7891. О первой краевой задаче для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с более чем двумя аргументами. Кордес (Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen. Cordes Heinz Otto), Math. Ann., 1956, 131, № 3, 278—312 (нем.)

Рассматривается эллиптическое квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x,\ u,\ \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)\,\partial^2u/\partial x_i\partial x_k=0$$

$$(x=x_1, \ldots, x_n),\qquad(1)$$

где коэффициенты a_{ik} удовлетворяют при каждом

$$k\in(0,\ \infty)\text{ для }x\in D,\ |u|,\ |u_j'|\leqslant k$$

условию Гёльдера с показателем $\lambda>0$; конечная область D ограничена конечным числом поверхностей без особых точек, причем при параметрическом задании этих поверхностей вторые производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha>\lambda$. Ищется решение, которое на границе D равно заданной функции, имеющей такой же характер гладкости, что и граница D. Как известно, для двух аргументов к этой задаче Ниренберг (РЖМат, 1954, 1662, 3708) применил теорему Шаудера о неподвижной точке; при этом в основе метода лежит априорная оценка констант Гёльдера для первых производных решения линейного эллиптического уравнения через граничные значения решения, не зависящая от характера непрерывности коэффициентов. Для $n>2$ при непосредственном применении оценок Ниренберга эта независимость теряется (РЖМат, 1957, 3151), что не дает возможности воспользоваться теоремой Шаудера. В данной работе при помощи оценки констант Гёльдера для функции v и ее производной через интегралы вида

$$\int_{|x-x^0|\leqslant\delta}[v(x)-v(x^0)]^2\,|x-x_0|^{-n-2\alpha}dx,$$

$$\int_{|x-x^0|\leqslant\delta}\Big[v(x)-v(x^0)-$$

$$-\sum(x_i-x_i^0)\,v_i'(x^0)\Big]^2\,|x-x_0|^{-n-2-2\alpha}dx$$

и уточнения оценок Хейнца (реф. 7889) квадратичных интегралов удается эту независимость обрести и тем самым получить существование решения первой краевой задачи в указанных выше предположениях. Однако при этом требование эллиптичности, к сожалению,

приходится заменить на более жесткое требование «конической эллиптичности», которое в общем случае имеет довольно громоздкий вид и, во всяком случае, выполняется, если отношение собственных значений матрицы уравнения (1) не превосходит некоторой явно выписываемой и зависящей от n постоянной. Существенность этого требования не ясна. А. Д. Мышкис

7892. О смешанной задаче для линейных эллиптических уравнений. Миранда (Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche. Miranda Carlo), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 279—303 (итал.)

В замкнутой ограниченной области T евклидова пространства m измерений рассматривается линейное эллиптическое уравнение

$$\mathfrak{M}u \equiv \sum a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f. \qquad (1)$$

Граница δT области T состоит из двух частей: $\delta T = S + \sum$, где $\sum$ — открытая область плоскости $x_m = 0$, а S — поверхность $m-1$ измерений, пересекающаяся с плоскостью $x_m = 0$ по многообразию $Vm-2$ измерений, которое является границей области Σ. Поверхности S и Σ должны удовлетворять некоторым условиям гладкости; кроме того, в точках V их внешние нормали должны образовывать угол, отличный от π и в случае $m > 2$ отличный также от 0.

Отыскивается функция, непрерывная в T, удовлетворяющая уравнению (1) в $T - \delta T$ и удовлетворяющая граничным условиям]

$$u = s \text{ для } x \in S, \quad Pu \equiv \partial u/\partial x_m + \beta u = \varphi \text{ для } x \in \Sigma. \qquad (2)$$

На коэффициенты уравнения и на функции s, β, φ и f накладываются некоторые условия гладкости.

В случае $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ доказывается существование и единственность решения задачи (1), (2); в общем случае устанавливается теорема об альтернативе.

В первом случае для доказательства теоремы существования рассматривается сначала аналогичная задача для уравнения Лапласа; ее решение сводится к решению задачи Дирихле в области, состоящей из T и зеркального отражения T относительно Σ. Затем рассматривается краевая задача

$$\mathfrak{M}^{(h)}u \equiv (1-h)\Delta u + h\mathfrak{M}u = f, \qquad (3)$$

$$u = s \text{ для } x \in S,$$

$$P^{(h)}u \equiv -(1-h)\frac{\partial u}{\partial x_m} + hPu = \varphi \text{ для } x \in \sum$$

и доказывается, что на отрезке $[0, 1]$ множество значений h таких, что задача (3) однозначно разрешима при любых f, s и φ, одновременно открыто и замкнуто, т. е. совпадает со всем отрезком. Для доказательства этого факта применяются априорные оценки решений задачи (1), (2), полученные в работе.

В общем случае теорема об альтернативе доказывается с помощью сведения задачи к операторному уравнению со вполне непрерывным оператором

Т. Д. Вентцель

7893. Теорема о дифференциальных неравенствах для эллиптического уравнения. Скоробогатько В. Я., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 335—338

Рассматривается эллиптическое уравнение

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + 2\sum_{i=1}^{2} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)$$

внутри области D с границей S типа Ляпунова с достаточно гладкими коэффициентами.

Пусть существуют две непрерывные функции $B_1(x)$ и $B_2(x)$, имеющие кусочно-непрерывные частные производные $\partial B_1/\partial x_1$ и $\partial B_2/\partial x_2$ и такие, что в D выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & A_2 \\ A_1 & A_2 & R \end{vmatrix} > 0, \text{ где } \begin{aligned} A_l &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k} - b_l + B_l, \\ R &= \partial B_1/\partial x_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} - C. \end{aligned} \qquad (1)$$

При этих условиях доказывается, что если дважды непрерывно дифференцируемая функция u удовлетворяет неравенству $Lu < 0$ и $u|_S = 0$, то $u \geqslant 0$ в $\bar{D}$. Случай самосопряженного положительного L рассматривался С. А. Чаплыгиным (РЖМат, 1955, 1253 К).

Показывается, что если внутренний диаметр D достаточно мал, то можно подобрать B_1 и B_2, удовлетворяющие неравенству (1). Имеются опечатки.

А. И. Кошелев

7894. Сингулярные эллиптические дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве. Штуммель (Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen. Stummel Friedrich), Math. Ann., 1956, **132**, № 2, 150—176 (нем.)

Изучается симметричный оператор A, определяемый дифференциальным выражением

$$Au = -\Delta u + 2i\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu}u + bu$$

на финитных гладких функциях во всем n-мерном пространстве E_n, причем $a_\nu(x)$ считаются непрерывно дифференцируемыми, $b(x)$ — квадратично интегрируемой и

$$\int_{|x-y|<1} |b(y)|^2 |x-y|^{-n+4-\alpha}\, dy \leqslant M(x).$$

Строится сопряженный оператор A^* и изучаются дифференциальные свойства решения уравнения $A^*u - \lambda u = f$; а также выводятся достаточные признаки существенной самосопряженности оператора A. Например, доказана существенная самосопряженность оператора Шрёдингера для системы s частиц с взаимодействием типа кулоновского, причем допускается присутствие однородного электрического поля (эффект Штарка). Похожие результаты получались ранее Като (Kato T., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, 196—211) и Браунеллом (Brownell F. H., Ann. Math., 1951, 54, 554—594). Л. Д. Фаддеев

7895. Об ограниченности в L_p высших производных решений эллиптических дифференциальных уравнений. Кошелев А. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 165—167, 211 (рез. англ.)

В n-мерной области Ω, ограниченной поверхностью Γ, рассматривается эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + c(x)u = f(x). \qquad (1)$$

Относительно Γ предполагается, что она состоит из конечного числа поверхностей типа Ляпунова, причем в каждой точке Γ уравнение границы может быть представлено в виде $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$, где ω — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям (в которых $p \in (1, \infty)$: 1) если $1 < p \leqslant 2(1-1/n)$, то $a_{ik}(x) \in C^3(\bar{\Omega})$, $c(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, функция ω четырежды непрерывно дифференцируема, 2) если $p > 2(1-1/n)$, то $a_{ik}(x) \in W_p^1(\Omega)$, $c(x) \in L_p(\Omega)$, контурная функция ω дважды непрерывно дифференцируема.

При этих условиях доказывается теорема: Если $f \in L_p(\Omega)$ и выполнено условие единственности, то однородная задача Дирихле для уравнения (1) имеет единственное обобщенное решение $u \in W_p^2(\Omega)$, причем выполняется неравенство

$$\|u\|_{W_p(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{L_p(\Omega)} \quad (p > 1), \qquad (2)$$

где C — постоянная, не зависящая от u и f.

Отмечается, что соответствующая теорема справедлива и для уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x)$$

в случае единственности решения.

Доказательство основывается на априорной оценке (2), которая, в свою очередь, устанавливается с помощью теорем вложения С. Л. Соболева и априорной оценки

$$\sum_{i,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_p(\Omega)} \leqslant A \|f\|_{L_p(\Omega)} + B \sup_{\Omega_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}} |u| \, d\Omega_{n-1}$$

(Ω_{n-1} — любое $(n-1)$-мерное плоское пересечение области Ω).

Исходя из разрешимости задачи Дирихле при $a_{ik}(x) = \delta_{ik}$ (оператор Лапласа) и применяя метод непрерывного продолжения по параметру, убеждаемся в справедливости теоремы. О. В. Гусева

7896. Свойства функции Грина и их приложения к эллиптическим уравнениям. Погожельский (Les propriétés d'une fonction de Green et ses applications aux équations elliptiques. Pogorzelski W). Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 46—75 (франц.)

Пусть Ω — область в n-мерном пространстве, ограниченная поверхностью Ляпунова S; $F(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_{n+1})$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, когда точка $A(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega + S$ и $|u_j| \leqslant R$ $(j = 1, \ldots, n+1)$.

Рассматривается задача: определить в Ω решение дифференциального уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_j^2 = F(x_1, \ldots, x_n, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n), \qquad (1)$$

по граничному условию

$$du/dn_P + a(P)u(P) = 0, \quad P \in S, \qquad (2)$$

где $a(P)$ — известная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на S.

В начале устанавливается, что функция Грина $G(A, B)$ для уравнения Лапласа при граничном условии (2) удовлетворяет неравенствам

$$|G(A, B)| < C_1/r_{AB}^{n-2}, \quad |\partial G(A, B)/dx_j| < C_2/r_{AB}^{n-h},$$

где C_1, C_2, h — некоторые положительные постоянные $(h < 1)$, не зависящие от точек A и B. Далее при помощи этих свойств функции Грина и теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки, доказано, что для уравнения (1) граничная задача (2) имеет по крайней мере одно решение, если эта последняя задача в случае уравнения Лапласа имеет только нулевое решение. Библ. 7 назв.

Б. В. Хведелидзе

7897. Свойство интегралов гипергармонических функций в эллиптической области. Розати (Proprietá integrali delle funzioni iperarmoniche in un dominoi ellittico. Rosati Francesco), Ricerche mat., 1955, **4**, № 14—125 (итал.)

Регулярные решения уравнения $\Delta^n u = 0$, где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, автор называет гипергармоническими функциями (в литературе их обычно называют полигармоническими или n-гармоническими функциями). В результате преобразования переменных: $x = p(\rho + 1/\rho)\cos\vartheta$, $y = p(\rho - 1/\rho)\sin\vartheta$, $p > 0$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, оператор Лапласа Δ принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{p^2}\frac{\rho^4}{\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right). \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что $\Delta^{n-1}u = \bar{u}$ — гармоническая функция, и пользуясь (1), автор вычисляет интеграл

$$c_k(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \vartheta)\, e^{-ik\vartheta} d\vartheta$$

для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Полученные формулы могут быть использованы при решении граничных задач для гипергармонических функций в эллипсе. А. В. Бицадзе

7898. Новое доказательство основной теоремы о сходимости потенциалов. Брело (Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels. Brelot M.), Ann. Inst. Fourier, 1955—1956 (1956), **6**, 361—368 (франц.)

Приводится новое доказательство следующей общей теоремы Картана: Пусть в некотором открытом множестве τ-мерного пространства имеется множество супергармонических функций $v \geqslant 0$. Их нижняя огибающая есть почти супергармоническая (quasi-surharmonique), т. е. отличается от супергармонической функции самое большее на множестве внешней емкости нуль. Новое доказательство использует некоторые общие понятия функционального анализа, независимые от теории потенциала. Х. Л. Смолицкий

7899. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа интерполяционным методом для области, ограниченной эллипсом. Золин А. Ф., Докл. АН УзССР, 1957, № 1, 3—7 (рез. узб.)

Решается внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в части плоскости, ограниченной эллипсом Γ, на котором задана непрерывная функция $f(\vartheta)$,

удовлетворяющая условию $\int_\Gamma f(\vartheta)\,ds = 0$. Решение ищется в виде предела выражений $a_0 \operatorname{Re} \operatorname{arch} z + \sum_{k=1}^{n} (a_k \operatorname{Re} z^k + b_k \operatorname{Im} z^k)$, $z = \rho e^{i\vartheta}$. Для фактического определения a_k, b_k, эллипс Γ на плоскости z отображается посредством функции Жуковского в окружность C на плоскости $w = re^{i\varphi}$. В этой плоскости функция $F(\varphi)$ — образ $f(\vartheta)$ — интерполируется соответствующими полиномами. Доказывается, что если $f(\vartheta)$ удовлетворяет условиям Липшица, то нормальные производные приближений стремятся к $f(\vartheta)$ равномерно на Γ, а если $f(\vartheta)$ только непрерывна, то в среднем. В последнем случае во всех внутренних точках приближения стремятся к решению. Указано, что методика может быть перенесена на случаи других областей. А. Л. Крылов

7900. О спектральном разложении гармонических форм. Лелон-Ферран (Sur la décomposition spectrale des formes harmoniques. Lelong-Ferrand Jacqueline), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 5, 600—602 (франц.)

Пусть X — n-мерное полное ориентируемое риманово многообразие класса C^∞ с ограниченной кривизной и пусть $r(x)$ обозначает расстояние до точки x от фиксированной точки x_0, а $|\varphi|^2$ означает скалярный квадрат дифференциальной формы φ. Первый результат, установленный автором, гласит:

Множество значений λ, для которых уравнение $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$, где $\Delta = d\delta + \delta d$ (Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, 1956, гл. V) допускает отличные от нуля решения, удовлетворяющие условию $|\varphi| < e^{Cr}$, имеет верхнюю грань вида $\alpha^2 + B\alpha + C$ (B, $C = \text{const}$).

Эта теорема дает возможность установить следующее утверждение, касающееся разложения решений уравнения $\Delta\Phi = \lambda\Phi$ в ряд: Пусть многообразие $Z^{n+\nu}$ локально приводимо; это значит, что оно допускает (локальную) регулярную риманову метрику вида: $ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j + h_{\alpha\beta}(y)\,dy^\alpha dy^\beta$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \nu$). Если Z полно, ориентируемо, имеет ограниченную кривизну и если его изометрическое покрытие $X \times Y$ (De Rham G., Comment. math. helv., 1952, 26, 328—344) таково, что либо X, либо Y компактно, то каждое решение уравнения $\Delta\Phi = \lambda\Phi$, имеющее экспоненциальный рост, представимо в виде конечной суммы: $\Phi = \sum_{r=1}^{k} \varphi_r(x) \wedge \psi_r(y)$

Это утверждение обобщает один результат Лихнеровича (Lichnérowicz, C. r. Acad. sci., 1951, 232, 1634), относящийся к гармоническим формам. Библ. 3 назв. И. И. Данилюк

7901. Замечания геометрического характера относительно квазилинейных однородных уравнений в частных производных второго порядка. Зауэр (Remarques géométriques sur les équations aux dérivées partielles du second ordre quasilinéaires et homogènes. Sauer R.), Colloq. Centre belge rech. math. 1, 1953, Paris, 1954, 119—126 (франц.)

Приводятся элементарные результаты относительно характеристик названных в заглавии уравнений гиперболического и эллиптического типа и соответствующих уравнений, получающихся из них посредством преобразования Лежандра. Намечаются (как правило, известные) приложения этих результатов к некоторым задачам дифференциальной геометрии (минимальные поверхности, бесконечно малые деформации поверхностей), плоских до- и сверхзвуковых течений газа, нестационарных изэнтропических одномерных течений газа, конических сверхзвуковых течений газа, теории гравитационных волн и теории пластичности.

Г. И. Баренблатт

7902. Элементарные решения и задача Коши. Бюро (Les solutions élémentaires et le problème de Cauchy. Bureau F. J.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954, Vol. 3. Groningen — Amsterdam, 1956, 58—70 (франц.)

Доклад представляет собой краткий обзор применения элементарных решений в теории задачи Коши. Сначала рассматриваются гиперболические и эллиптические уравнения высших порядков. Дается перечень результатов, полученных в отношении построения и исследования их элементарных решений.

Для простого случая смешанной задачи

$$u_{tt} = Lu \quad (Lu = \partial^2 u/\partial x^2 - a(x)\,u),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) = 0, \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

$$u(0, t)|_{t>0} = u(l, t)|_{t>0} = 0$$

указано, как построить ей соответствующее «элементарное решение».

Приводится пример элементарного решения для оператора

$$L = D_1 D, \quad D_1 = \partial/\partial t + \mu\Delta_3, \quad D = \partial^2/\partial t^2 - a^2\Delta_3,$$

где Δ_3 — оператор Лапласа.

Перечисляются результаты, полученные для задачи Коши для уравнения Эйлера—Дарбу

$$u_{tt} + \frac{k}{t}\,u_t = \Delta_p u$$

при задании начальных данных на сингулярной гиперповерхности $t = 0$.

Вопрос о применении интеграла Фурье к решению задачи Коши затронут в докладе лишь вскользь. В конце доклада приводятся ссылки на 2 статьи Бюро, содержащие обширную библиографию. В. М. Бабич

7903. Частные виды уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с тремя переменными в употребительных криволинейных ортогональных координатах. Разделение переменных. Робен (Formes particulières de l'équation à trois variables, $\Delta u + k^2 u = 0$, dans les systèmes usuels de coordonnées curvilignes, orthogonales. Séparation des variables. Robin Louis), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 93—102 (франц.)

Уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ записывается в криволинейной системе координат и затем в ряде частных случаев (прямоугольных, цилиндрических, сферических, координат вытянутого и сжатого эллипсоидов вращения, координаты трехосного эллипсоида, координаты эллиптического и параболического цилиндров, координаты параболоида вращения, тороидальных координат) производится разделение переменных и выписываются частные решения.

Статья является частью справочника для физиков и инженеров. Х. Л. Смолицкий

7904. О решении уравнения $(\partial^2/\partial t^2 - \partial\Delta/\partial t - \Delta)\,u = f$. Добрышман Е. М., Дюбюк А. Ф., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 55—58

Для уравнения

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \partial\Delta u/\partial t - \Delta u = f(x, y, z, t)$$

$$(\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$$

строятся формальные решения 1) задачи Коши для $t \geqslant 0$, с начальными данными u_0, u_1 при $t = 0$, во всем пространстве x, y, z; 2) смешанной задачи в полупространстве $z \geqslant 0$, содержащей начальные данные

Коши при $t=0$ с добавлением условия $du/dz=0$ при $z=0$.

Первое решение имеет вид

$$u(x,\ y,\ z\ \ t)=\frac{1}{4\pi}\int\int_{S}\left\{u_0(x_1,\ y_1,\ z_1)\,\frac{\partial\Phi_1(r,\ t)}{\partial t}+\right.$$

$$+[u_1-\Delta u_0]\,\Phi_1(r,\ t)+$$

$$\left.+\int_0^t f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t-t_1)\,\Phi_1(r,\ t_1)\,dt_1\right\}\frac{ds}{r},\qquad(1)$$

где $r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$, S — сфера радиуса r с центром $(x,\ y,\ z)$. Это решение получается средствами операционного исчисления и $\Phi_1(r,\ t)$ есть оригинал (построенный авторами) функции

$$\frac{p}{p+1}\,e^{-pr/\sqrt{p+1}}.\qquad(2)$$

Второе решение отличается от (1) тем, что функция $\Phi_1(r,\ t)/r$ заменяется на

$$\frac{\Phi_1\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2},\ t\right)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}+$$

$$+\frac{\Phi_1\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2},\ t\right)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2}}$$

с интегрированием по всему полупространству $z\geqslant 0$.

Сходимость выражений не проверяется. Имеется много опечаток (описок), ряд из которых связан с тем, что функция (2) смешивается с функцией $\frac{1}{\sqrt{p+1}}\,e^{-pr/\sqrt{p+1}}$

М. К. Фаге

7905. О доказательстве единственности для отрицательных значений времени некоторых неконсервативных полей, описываемых уравнениями гиперболического типа. Траутман (On the proofs of «backward» uniqueness for some non-conservative fields describable by differential equations of the hyperbolic type. Trautman A.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1955, Cl. III, 3, № 6, 307—312 (англ.)

Рассматриваются гиперболические системы уравнений в частных производных, с характеристической формой $A[\xi]=a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$, удовлетворяющей требованиям: $a_{00}>0$, $a^{0k}=0$, $a^{kl}\xi_k\xi_l<0$ при $\xi\neq 0$ (система обозначений, принятая в теории относительности). Кроме этого, система предполагается обладающей рядом специальных свойств, вытекающих из физических соображений:

I. Существует вектор I^ν, непрерывный и удовлетворяющий условиям: $I^0\geqslant 0$, $a_{\alpha\beta}I^\alpha I^\beta\geqslant 0$, где $a_{\alpha\beta}=(a^{\alpha\beta})^{-1}$, и уравнению $I^\alpha_{,\alpha}+Q=0$, которое является следствием уравнений системы.

II. Существует постоянная $M>0$ такая, что внутри характеристического конноида Ω области R на плоскости $x^0=0$ имеет место неравенство $|Q|\leqslant MI^0$.

III. I обладает тем свойством, что из $I^\nu\equiv 0$ следует обращение в нуль решения системы. Основная теорема: для таких систем имеет место единственность решения задачи Коши.

В работе объяснен физический смысл делаемых предположений. I_0 может быть интерпретирован как плотность энергии поля. Приведены примеры уравнений теоретической физики, удовлетворяющие вышеприведенным условиям.

А. Л. Крылов

7906. Критерий выполнения принципа Гюйгенса. Дуглис (A criterion for the validity of Huygen's principle. Douglis Avron), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 391—402 (англ.)

Приводится необходимый и достаточный критерий того, чтобы у гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя независимыми переменными отсутствовала диффузия волн.

Пусть S_Q — пространственно ориентированная поверхность, несущая начальные данные и лежащая в основании характеристического конноида с поверхностью C_S^Q и с вершиной в Q, T_S^Q — пересечение поверхности конноида C_S^Q.

Пусть для решения задачи Коши имеет место интегральное уравнение

$$u(Q)=f(Q)+\int_{C_S^Q}K(Q,\ P)\ u\ (P)\,dS_P,$$

где $K(Q,\ P)$ зависит лишь от коэффициентов уравнения и удовлетворяет условию $K(Q,\ P)=O(\overline{QP}^{-1})$ при $P\to Q$, $f(Q)$ — непрерывная функция, определяемая начальными данными лишь на T_S^Q и равная нулю, если они там равны нулю.

Критерий, доказательству которого посвящена работа, заключается в том, что для отсутствия диффузии волн, необходимо и достаточно, чтобы $K(Q,\ P)\equiv 0$. Критерий этот близок к критерию Адамара (равенство нулю логарифмической части элементарного решения) и может быть выведен из него, о чем упомянуто в начале работы, но метод доказательства критерия, примененный Дуглисом, основан на иных соображениях.

В. М. Бабич

7907. Пример неединственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа. Де-Джорджи (Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico. De Giorgi Ennio), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 382—387 (итал.)

В полосе $T\{0\leqslant t\leqslant 1,\ -\infty<x<\infty\}$ построены четыре функции $a(x,\ t)$, $b(x,\ t)$, $c(x,\ t)$, $w(x,\ t)$, непрерывные и обладающие непрерывными частными производными любого порядка, такие, что в T выполняется уравнение

$$\partial^8w/\partial t^8=a\partial^4w/\partial x^4+b\partial^2w/\partial x^2+cw,$$

а на прямой $t=0$

$$\partial^hw/\partial t^h=0,\quad h=0,\ 1,\ \ldots,\ 7,$$

причем функция w в T не равна тождественно нулю.

Т. Д. Вентцель

7908. Замечания о проблемах теплопроводности. Кук (Note on a heat conduction problem. Cooke J. C.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 5, 331—334 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$k^{-1}u_t=u_{rr}+(1/r)\,u_r+(1/r^2)\,u_{\theta\theta}.\qquad(1)$$

Имеется решение, удовлетворяющее следующим начальному и граничным условиям:

$u\to 1$ при $t\to+0$ для $0<r,\ 0<\theta<\beta$,

$u\to 0$ при $\theta\to+0$ для $0<t,\ 0<r$,

$u\to 0$ при $\theta\to\beta-0$ для $0<t,\ 0<r$.

После замены $w = 1 - u$, $\theta = \beta\Phi\pi$ записывается дифференциальное уравнение относительно синус-коэффициентов Фурье, а затем, применяя преобразование Ганкеля, автор получает обыкновенное дифференциальное уравнение по t. Решение последнего уравнения получается в явном виде. К этому решению автор применяет формулу обращения Ганкеля, и, подставляя полученный результат в ряд Фурье по синусам, получает окончательное решение

$$u = \frac{u}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} \frac{1^{-q^2kt} I_k(qr)}{q}\, dq.$$

Е. И. Ким

7909 К. Методы математической физики. Курс дополнительный, вышедший в марте—апреле—мае 1952 г. Различные дополнения к преобразованию Лапласа и уравнениям в частных производных. Жане (Méthodes mathématiques de la physique. Cours complémentaire, mars—avril—mai 1952. Compléments divers sur la transformation de Laplace et les équations aux dérivées partielles. Janet Maurice. Paris, Secrét. math. Multigr., 1955, 48 fr., 350 fr.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 12, 269 (франц.)

7910 Д. О смешанных задачах для некоторых систем линейных уравнений в частных производных в бесконечных областях. Чэнь Чин-и. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

7911 Д. О задаче Коши для эллиптических уравнений. Лаврентьев М. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1957

7912 Д. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических уравнений 2-го порядка. Краснов М. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. энерг. ин-т. М., 1957

7913 Д. Краевые задачи для нелинейных параболических и эллиптических уравнений. Чжоу Юйлинь. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

7914 Д. Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений. Макаренко Г. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. энерг. ин-т, М., 1957

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

7915. Существование и устойчивость ультрагармоник и субгармоник в вынужденных нелинейных колебаниях. Кои (The existence and stability of ultraharmonics and subharmonics in forced nonlinear oscillations. Caughey T. K.), J. Appl. Mech., 1954, **21**, № 4, 327—335 (англ.)

Рассматриваются вынужденные колебания нелинейных систем, описываемых уравнением

$$d^2y/dt^2 + kdy/dt + \omega^2 y + \mu y^3 = P\cos(\Omega t + \alpha), \quad (1)$$

где $P \ll \omega^2$, $\mu y^3 \ll \omega^2 y$, $kdy/dt \ll \omega^2 y$.

Решение уравнения (1) строится методом Ван-дер-Поля.

Показывается, что при определенных условиях ультрагармонические и субгармонические движения существуют и дополняют гармоническое движение. Изучается устойчивость этих движений и показывается, что точки резонансной кривой многочастотных колебаний, в которых кривая имеет вертикальные касательные, неустойчивы. Показано, что ультрагармонические и гармонические движения нечувствительны к начальным условиям, а субгармоническое движение может быть получено только для определенного множества начальных условий. Ю. А. Митропольский

7916. Периодические решения дифференциального уравнения *RC*-генератора. Гиллис (The periodic solutions of the differential equation of a resistance-capacitance oscillator. Gillies A. W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 1, 101—121 (англ.)

Рассматривается ламповый *RC*-генератор с однородной фазосдвигающей цепочкой из трех дифференцирующих ячеек. Вольтамперная характеристика лампы аппроксимируется степенным рядом, однако вместо обычного способа представления анодного тока лампы рядом по степеням сеточного напряжения, автор прибегает к представлению сеточного напряжения в виде ряда по степеням анодного тока.

Дифференциальное уравнение генератора приводится к виду

$$\left[(D^2 + 1)\left(D + \frac{\sqrt{6}}{5}\right) + \varepsilon D^3\right] x + g(D) \sum_{n=2} c_n \mu^{n-1} x^n = g(D)\, 2B\cos\omega t,$$

где $29g(D) = D^3 + 6\sqrt{6}D^2 + 30D + 6\sqrt{6}$, D — оператор дифференцирования, ε, μ — малые параметры, причем в большинстве случаев принимается $\varepsilon = \mu^2$.

Для отыскания периодических решений этого уравнения автор пользуется методом, развитым в своей предыдущей работе (РЖМат, 1956, 4547).

Полученные далее дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы основного решения оказываются аналогичными тем, которые получаются в случае уравнения Ван-дер-Поля для обычного *LC*-генератора.

Примечание референтов. На практике, вместо однородной фазосдвигающей цепочки, часто используется неоднородная; при этом критическое значение коэффициента усиления лампы может быть снижено. Метод автора применим и к этому случаю.

Ю. Н. Бакаев и П. И. Кузнецов

7917. Интегральное представление динамического вектора поля. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 3—19

Продолжаются исследования, начатые автором в предыдущей работе (Докл. АН СССР, 1952, 85, № 15—18). Выводится интегральное представление для вектора $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, удовлетворяющего системе дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \Omega(x, y, z, t);\ \operatorname{div}\mathbf{v} = \theta(x, y, z, t) \quad (1)$$

с заданными функциями Ω и θ. Это представление оказывается возможным использовать для вывода интегро-дифференциальных уравнений для вектора $\mathbf{v}$, являющегося решением некоторых граничных задач теории упругости, гидромеханики и электродинамики. Указанные интегро-дифференциальные уравнения естественным образом получаются, если представить уравнения движения сплошной среды в виде системы (1), причем зависимость Ω и θ от $\mathbf{v}$ дается уравнениями движения.

В статье приводятся примеры, когда полученные интегро-дифференциальные уравнения допускают эффективное рассмотрение. А. С. Алексеев

7918. Применение пфаффовых форм к неголономным механическим системам. Циммерман (Anwendung der Pfaffschen Formen auf anholonome systeme der Mechanik. Zimmerman H.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 9—10, 359—360 (нем.)

См. РЖМех, 1956, 4952.

7919. Модель одномерного сжимаемого турбулентного потока с двумя семействами характеристик.

Ч. I, II. Бюргерс (A model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics. I. II. Burgers J. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **B58**, № 1, 1—8, 9—18 (англ.)
См. РЖМех, 1956, 5269.

7920. Новейшие результаты в теории поверхностных волн в воде. Стокер (Some recent progress in the theory of surface waves in water. Stoker J. J.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954, Vol. 3, Groningen—Amsterdam, 1956, 251—263 (англ.)
Работа носит обзорный характер. В первом параграфе дается описание основных схематизаций явления распространения нелинейных волн. Подробно анализируется теория длинных волн. В частности, показывается, что уравнения длинных волн можно рассматривать как некоторую предельную систему уравнений, когда введенный определенным образом малый параметр стремится к нулю.
Второй параграф посвящен основным вопросам дифракции поверхностных волн. Излагаются основы линейной теории прохождения волн над препятствием.
В третьем параграфе перечисляются основные результаты по гидродинамике корабля и теории колебания тела в жидкости. Отмечается, что исследования М. Д. Хаскинда по теории корабля (Прикл. матем. и механика, 1946, **10**, № 1) основываются на уравнениях и посылках отличных от американских исследований. Более поздние работы Хаскинда не цитируются.
В четвертом параграфе излагается постановка задачи об уединенной волне. Указывается, что основные результаты здесь принадлежат М. А. Лаврентьеву (Докл. АН УССР, 1948, 1) и Фридрихсу и Хайерсу (РЖМат, 1956, 1402) Н. Н. Моисеев

7921. О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению. Сретенский Л. Н., Прикл. матем. и механ, 1956, **20**, № 3, 349—361
См. РЖМех, 1957, 8952.

7922. Исследование аппроксимации уравнения, определяющего течение газа. Применение к плоским соплам. Фенен (Recherche d'approximations des équations régissant les écoulements des gaz. Applications aux tuyères planes. Fenain M.), Rech. aéronaut., 1953, mai—juin, № 3, 11—28 (франц.)
См. РЖМех, 1956, 7282.

7923. Новый метод решения уравнений сжимаемого газа. Бетти (A new method of solution of equation of compressible flow. Betti Ezio), J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, № 7, 516 (англ.)
См. РЖМех, 1956, 4274.

7924. Об ударе эллипсоида вращения, плавающего на поверхности весьма тяжелой жидкости. Блох Э. Л., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, 631—636
В линеаризированной постановке рассматривается задача о так называемых «вертикальных» движениях плавающего на поверхности жидкости эллипсоида вращения, плоскость симметрии которого совпадает со свободной поверхностью жидкости. (Под «вертикальными» движениями понимаются вращения вокруг главных осей x и y эллипсоида, лежащих в плоскости свободной поверхности, а также поступательное движение эллипсоида в направлении z третьей главной оси). Жидкость предполагается бесконечно тяжелой, что приводит к условию на свободной поверхности $\partial\varphi/\partial z=0$ (φ — потенциал скоростей). Потенциал φ аналитически продолжается в верхнее полупространство и определяется в области, внешней к смоченной части эллипсоида и ее зеркальному изображению; решение строится в виде двойных рядов по функциям Лежандра. Даются в виде рядов выражения для коэффициентов присоединенной массы; исследуются всевозможные частные случаи. Приводятся в форме графиков результаты сравнения коэффициентов присоединенной массы для случаев невесомой и весьма тяжелой жидкости, основанные на полученных в реферируемой статье результатах, результатах предыдущей работы автора РЖМех, 1956, 802 и известных результатах о неустановившихся движениях эллипсоида в безграничной жидкости. Г. И. Баренблатт

7925. Новое точное решение уравнений движения вязкой жидкости в случае осевой симметрии. Агравал (A new exact solution of the equations of viscous motion with axial symmetry. Agrawal H. L.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 1, 42—44 (англ.)
См. РЖМех, 1957, 7945

7926. Распространение колебаний в упруго-вязкой среде. Скотт (Wave propagation in a visco-elastic medium. Scott E. J.), Quart. Appl. Math., 1954, 12, № 3, 300—306 (англ.)
См. РЖМех, 1955, 5687.

7927. Колеблющаяся струна с двигающимися концами. Хейс (The vibrating string with moving ends. Hayes Wallace D.), Mém. Acad. roy. Belgique, Cl. sci., 1954, 28, № 6, 42—49 (англ.)
См. РЖМех, 1956, 5418.

7928. Теория асимптотического поведения решений волнового уравнения $(\nabla^2+k^2)\varphi=0$ при малых длинах волн. Эрселл (On the short-wave asymptotic theory of the wave equation $(\nabla^2+k^2)\varphi=0$. Ursell F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 1, 115—133 (англ.)
Рассматривается внешняя краевая задача

$$\text{I}\begin{cases}\partial^2\varphi/\partial x^2+\partial^2\varphi/\partial y^2+k^2\varphi=0,\\ \partial\varphi/\partial n|_s=V(s),\\ \sqrt{r}\,(\partial\varphi/\partial r-ik\varphi)\to 0 \text{ при } r\to\infty,\end{cases}$$

где S — замкнутая выпуклая кривая, s — длина дуги, $k=\omega/c$, и исследуется вопрос о поведении ее решения при $\omega\to\infty$.
Для того чтобы решить задачу I, достаточно найти значения функции φ на S: $\varphi=\varphi(s)$. Последние могут быть определены из интегрального уравнения

$$\varphi(s')-\frac{i}{2}\int_S\varphi(s)\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}(s),\ \mathbf{r}(s'),\ \omega)\,ds=$$
$$=-\frac{i}{2}\int_S V(s)\,G(\mathbf{r}(s),\ \mathbf{r}(s'),\ \omega)\,ds,$$

где $G(\mathbf{r},\mathbf{r}(s),\ \omega)$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям:

$$\partial^2G/\partial x^2+\partial^2G/\partial y^2+k^2G=0,$$
$$\partial G/\partial R_0\sim\partial H_0(kR_0)/\partial R_0\sim 2i/\pi R_0 \text{ при } R_0=|\mathbf{r}-\mathbf{r}(s)|\to 0,$$
$$\sqrt{r}\,(\partial G/\partial r-ikG)\to 0 \text{ при } r\to\infty$$

(эти условия определяют функцию G неоднозначно).
Подбирая специальным образом построенную функцию $G_c(\mathbf{r},\mathbf{r}(s'),\omega)$, автор устанавливает соотношения:

$$\varphi(s')=-\frac{i}{2}\int_S V(s)\,G_c(\mathbf{r}(s),\ \mathbf{r}(s'),\ \omega)\,ds+$$
$$+o\left[\max_{s'}\left|\int_S V(s)\,G_c(\mathbf{r}(s),\ \mathbf{r}(s'),\ \omega)\,ds\right|\right],$$
$$\varphi(s')\sim -iV(s')/k \text{ при } V(s')\neq 0.$$

Отсюда с помощью формулы Грина получается следующая асимптотическая формула для решения задачи I.

$$\varphi(P) \sim -\frac{i}{k} V(P^*) \exp(ikp(P)) \cdot \left(1 + \frac{p(P)}{R(P^*)}\right),$$

если $V(P^*) \neq 0$, где P^* — точка S, ближайшая к P, $p(P)$ — длина отрезка PP^*, $R(P^*)$ — радиус кривизны в точке P^*. Д. П. Костомаров

7929. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. Филиппова А. Ф., Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 6, 688—703

Исследуется дифракция плоских упругих волн относительно полупрямой (рассматривается плоская задача теории упругости). Задачи подобного типа решены были ранее М. М. Фридманом (Докл. АН СССР, 1949, 66, № 1, 21—24) с помощью метода функционально-инвариантных решений В. И. Смирнова—С. Л. Соболева.

Вместо того, чтобы ставить и решать задачу дифракции непосредственно в смещениях, как это делает М. М. Фридман, автор вводит потенциалы продольных и поперечных волн и ставит задачу уже для этих потенциалов. Разбиение задачи на «симметричную» и «антисимметричную» позволило значительно упростить решение задачи, в частности, избежать сложного аппарата сингулярных интегральных уравнений, который применял в своей работе М. М. Фридман.

В реферируемой работе выведен ряд асимптотических формул (в частности для искомых смещений вблизи волнового фронта), проведены некоторые числовые подсчеты.

Некоторые задачи дифракции, разобранные в работе, ранее не рассматривались. В. М. Бабич

7930. Продольные и поперечные колебания полубесконечных тел и пластин. Тиффен (Dilational and distortional vibrations of semi-infinite solids and plates. Tiffen R.), Mathematika, 1956, 3, № 6, 153—163 (англ.)

Рассмотрен вопрос о существовании чисто продольных или чисто поперечных решений динамических уравнений теории упругости в полубесконечной области $z \geqslant 0$. Указаны типы граничных и начальных условий, когда такие решения возможны.

В. М. Бабич

7931. Осесимметричные проблемы о штампе, щели и кручении. Пейн (On axially symmetric punch, crack and torsion problems. Payne L. E.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1953, 1, № 1, 53—71 (англ.)

Рассмотрены решения некоторых осесимметричных смешанных задач теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий с использованием различных криволинейных координат.

Уравнения теории упругости в перемещениях удовлетворяются путем введения двух гармонических функций, причем во всех исследуемых случаях дело сводится к решению краевых задач теории потенциала для одной из этих функций (φ).

Рассмотрены следующие основные задачи: 1) Давление кругового в плане жесткого штампа на упругое полупространство ($z > 0$) в предположении отсутствия трения. Краевые условия при этом имеют вид: $\varphi = f(r)$ при $z = 0$, $r < b$; $\partial\varphi/\partial z = 0$ при $z = 0$, $r > b$. 2) Действие симметричных нормальных усилий по поверхности плоской круглой щели в неограниченном упругом теле. Краевые условия таковы: $\partial\varphi/\partial z = h(r)$ при $z = 0$, $r < b$; $\varphi = 0$ при $z = 0$, $r > b$.

Решение обоих задач получено как с помощью вырожденных эллипсоидальных координат путем разложения в ряд по полиномам Лежандра, так и с помощью тороидальных координат и интегрального разложения по функциям Лежандра с комплексным индексом.

В работе рассмотрены также и более простые задачи о нормальном давлении по круговой площадке на границе полупространства (сводится к задаче Неймана), о равновесии неограниченного тела, ослабленного плоской круглой щелью, на поверхности которой заданы перемещения (сводится к задаче Дирихле), а также задача о кручении полупространства.

В списке литературы совершенно отсутствуют известные работы советских ученых: В. М. Абрамова (Докл. АН СССР, 1939, 23, вып. 8, 759—764), М. Я. Леонова (Прикл. матем. и механика, 1939, 3, № 2; 1940, 4, № 5—6, 73—86; РЖМех, 1953, 269), А. И. Лурье (Прикл. матем. и механика, 1941, 5, № 3), Н. Е. Кочина (Прикл. матем. и механика, 1945, 9, № 1, 13—66), Л. А. Галина (Прикл. матем. и механика, 1946, 10, № 4) и др., в которых, по существу, рассматриваются те же задачи, а также более общие. Я. С. Уфлянд

7932. Об одной краевой задаче, связанной с расчетом призматической оболочки переменной толщины. Касумов (Дэйишэн галынлыглы призматик эластики өртүйүн hесабаты илэ әлагәдар олан бир сәрhәд мәсәләси. Гасымов Чалал), Элми эсәрләр Азәрб. унив. Уч. зап. Азерб. ун-т, 1956, № 7, 3—21 (азерб.; рез. русск.)

Излагаемые результаты содержатся в работе И. Н. Векуа, РЖМат, 1956, 5854. С. А. Терсенов

7933. Заметка об уравнениях пологих упругих оболочек. Нагди (Note on the equations of shallow elastic shells. Naghdi P. M.), Quart Appl. Math., 1956, 14, № 3, 331—333 (англ.)

См. РЖМех, 1957, 9309.

7934. Математическая теория трехмерной кавитации и струй. Гарабедян (The mathematical theory of threedimensional cavities and jets. Garabedian P. R.), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, 62, № 3, 219—235 (англ.)

См. РЖМех, 1957, 8903.

7935 Д. Обтекание произвольного симметричного профиля с отошедшей ударной волной. Белоцерковский О. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1957

7936 Д. Расчет некоторых околозвуковых потенциальных течений газа. Чушкин П. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1957

7937 Д. О решении уравнения переноса при сильно неизотропном рассеянии. Гермогенова Т. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1957

См. также: 7954, 7963, 7987, 7991, 7994, 8031, 8035, 8039, 8245, 8246, 8248—8252.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7938. Формулы Фредгольма для систем линейных интегральных уравнений. Лопатинский Я. Б., Науч. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1956 (1957), вып. 38, 8—12

Полученные Мандом (РЖМат, 1954, 5622) формулы Фредгольма для системы уравнений выводятся автором путем переноса классической теории для одного уравнения на случай системы уравнений, при

достаточно общих предположениях относительно области. М. К. Номоконов

7939. Интегральное уравнение колебаний криволинейного стержня. Меляховецкий А. С., Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, 20, 27—39

Автор вводит для колебания плоского криволинейного стержня переменной кривизны и жесткости функцию влияния касательных перемещений $K(\sigma, s)$, под которой понимается касательное перемещение в точке s стержня при действии единичной касательной силы в точке σ, а также другие функции влияния, выражающиеся через $K(\sigma, s)$.

Находится самосопряженная краевая задача для дифференциального уравнения, функцией Грина которой является функция $K(\sigma, s)$. С помощью функций влияния составляется система интегро-дифференциальных уравнений свободных и вынужденных колебаний плоского стержня. Решение системы методом Фурье сводится к решению одного нагруженного интегрального уравнения с симметричным ядром. Из этого следует обоснование применения метода Фурье при решении ряда задач о колебаниях стержня, в частности, в задаче, рассмотренной автором (Докл. АН СССР, 1952, 85, вып. 3, 513—516). Ю. К. Ландо

7940. Распределение собственных значений некоторых интегральных операторов. Кац (Distribution of eigenvalues of certain integral operators. Kac M.), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 2, 141—148 (англ.)

Для определения асимптотики собственных значений интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi(y)\,U(y)}{|y-x|^{\alpha}}\,dy = \lambda\varphi(x) \qquad (1)$$

рассматривается следующее выражение:

$$\int_0^{\infty} \mathbf{E}\left\{\exp\left[-U\int_0^t V(x+x(\tau))\,d\tau\right]\chi_A(x+x(t))\right\}dt, \qquad (2)$$

где $x(\tau)$ $(x(0)=0)$ — случайный процесс с однородными независимыми приращениями, распределенный по устойчивому закону распределения с показателем экспоненты $\beta = 1-\alpha$, $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания, а $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества $A \subset (-a, a)$. Предполагая, что $0 < \alpha < 1/2$, а $V(y)$ — непрерывная функция такая, что $V(y) > m > 0$, $-a \leqslant y \leqslant a$, величина (2) равна

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{1+U\mu_j}\int_A \frac{\psi_j(y)}{\sqrt{V(y)}}\,dy \cdot \frac{\psi_j(x)}{\sqrt{V(x}}\,, \qquad (3)$$

где μ_j и ψ_j — собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$D_\beta \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{V(x)}\cdot\sqrt{V(y)}}{|x-y|^{\alpha}}\,\psi(y)\,dy = \mu\psi(x), \qquad (4)$$

а $D_\beta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\gamma_1 \cdot \gamma_1^{-\beta} d\gamma_1$ — постоянная; при этом μ_j совпадают с собственными функциями уравнения (1) при $U(y) = D_\beta V(x)$. Из (3) выводится соотношение

$$\int_0^{\infty} \mathbf{P}\left\{\int_0^t V(x+x(\tau))d\tau \geqslant \gamma,\ x+x(t) \in A\right\}dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j e^{-\gamma/\mu_j}\int_A \frac{\psi_j(y)}{V(y)}\,dy\,\frac{\psi_j(x)}{\sqrt{V(\tau)}}\,, \qquad (5)$$

где $\mathbf{P}$ — символ вероятности. Дальнейшие преобразования этого соотношения приводят к равенству

$$\sum_1^{\infty} \mu_j e^{-\gamma/\mu_j} = C_\beta \gamma^{1-1/\beta}\int_0^{\infty} t^{-1/\beta}dt \int_{-a}^{a} V(x)\,\mathbf{P}\times$$

$$\times\left\{\int_0^t V(x+x(\gamma\tau))\,d\tau \geqslant 1 \mid x(\gamma\tau)=0\right\}dx, \qquad (6)$$

где $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ означает, как обычно, условную вероятность, а $C_\beta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\xi^\beta}d\xi$. Используя далее интуитивно очевидное равенство

$$\lim_{\gamma\to 0}\mathbf{P}\left\{\int_0^t V(x+x(\gamma\tau))\,d\tau \geqslant 1 \mid x(\gamma\tau)=0\right\} =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ при } tV(x) \geqslant 1 \\ 0 \text{ при } tV(x) < 1 \end{cases} \qquad (7)$$

(которое при принятых ограничениях на $V(x)$ легко аккуратно доказать) и, применяя тауберову теорему Карамата, можно получить отсюда следующий окончательный результат

$$\mu_n^{-1} \sim n^\beta \Big/ \left(\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} V^{1/\beta}(x)\,dx\right)^\beta \quad \text{при } n\to\infty. \qquad (8)$$

В заключение указывается способ распространения этого результата на более широкую область $0 < \alpha < 1$ значений α; отмечается также, что требование ограниченности $V(y)$ снизу можно заменить более слабым требованием.

Материал настоящей работы тесно связан с материалом предшествующего обзора автора (Proceedings of the Second. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, pp. 180—216. University of California Press, Berkeley Los Angeles, 1951; см. особенно § 11 этого обзора). А. М. Яглом

7941. О сингулярных интегральных уравнениях и об одном классе гомоморфизмов в локально выпуклых пространствах. Шефер (Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen. Schaefer Helmut), Math. Z., 1956, 66, № 2, 147—163 (нем.)

Пусть X — гильбертово пространство и R — кольцо линейных непрерывных операторов из X в X. Линейный непрерывный оператор T из X в X называется обобщенным оператором Фредгольма или σ-преобразованием, если выполнены условия: 1) $T(X)$ замкнуто и фактор-пространство $X/T(X)$ имеет конечную размерность $n(T)$; 2) подпространство нулей оператора T имеет конечную размерность $m(T)$. Множество $\sum$ всех σ-преобразований образует полугруппу, причем, если $T \in \sum$, то и сопряженный оператор $T^* \in \sum$. Доказывается, что если $T \in R$ и $\dim X \geqslant N_0$, то $T \in \sum$ тогда и только тогда, когда существуют U, $V \in \sum$ такие, что $UTV = I$ (I — тождественное преобразование). Данное предложение используется при доказательстве следующих известных свойств σ-преобразований: а) $\sum$ — открытое подмножество банаховой алгебры R; б) если $T \in \sum$, то $T + K \in \sum$ для произвольного линейного вполне непрерывного преобразования K из X в X; в) если T_1, $T_2 \in \sum$, то $\gamma(T_1T_2) = \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$,

где $\gamma(T)$ — индекс преобразования T, т. е. $\gamma(T) = m(T) - n(T)$; г) пусть $T_0 \in \sum$ фиксировано, A — линейное преобразование, удовлетворяющее условию: $\|A\| < r$ (r — подходящее положительное число), и K — произвольный линейный вполне непрерывный оператор. Тогда $\gamma(T_0 + A) = \gamma(T_0 + K) = \gamma(T_0)$; д) пусть $T_0 \in \sum$ и K — вполне непрерывный оператор. Тогда, за исключением не более счетного числа точек $\{\lambda_\nu\}$, у которых нет конечных предельных точек в комплексной плоскости (λ), $m(T_0 - \lambda K) = m_0$ и $n(T_0 + \lambda K) = n_0$ не зависят от λ, а в точках λ_ν (это множество может быть пустым) $m(T_0 + \lambda_\nu K) > m_0$, $n(T_0 + \lambda_\nu K) > n_0$. Эти предложения используются для установления основных свойств сингулярных интегральных уравнений в случае одного измерения. В § 3 (последнем) автор рассматривает гомоморфизмы из локально выпуклого линейного топологического хаусдорфова пространства $\mathfrak{E}$ в другое такое пространство $\mathfrak{F}$ и из них выделяет множество $\sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ всех σ-преобразований, которые определяются так же, как раньше. Доказываются следующие предложения: 1) Если T — линейный непрерывный оператор из $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{F}$, то требование нормальной разрешимости уравнения $Tx = y$ эквивалентно требованию замкнутости $T(\mathfrak{E})$. 2) $T \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда существуют два линейных непрерывных преобразования U и V такие, что $UT = I - L_1$, $TV = I - L_2$, где I — тождественное преобразование, L_1 и L_2 — линейные непрерывные преобразования конечного ранга соответственно из $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{E}$ и из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}$. 3) Если $T \in \sum(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, $S \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, то $TS \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$, причем $\gamma(TS) = \gamma(T) + \gamma(S)$. 4) Пусть S и T — линейные непрерывные преобразования соответственно из $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{F}$ и из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$. Тогда, если $TS \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$, то либо $T \in \sum(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ и $S \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, либо $T \in \sum(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ и $S \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$. 5) Пусть $T_0 \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ и K — произвольное линейное вполне непрерывное преобразование из $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{F}$. Тогда $T_0 + K \in \sum(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ и $\gamma(T_0 + K) = \gamma(T_0)$. Библ. 23 назв. М. М. Вайнберг

7942. О некоторых системах нелинейных интегральных и интегродифференциальных уравнений. Альбрыхт (O pewnych układach nieliniowych równań całkowych i całkowo-różniczniczkowych. Albrycht Jerzy), Zesz., nauk. Uniw. Poznaniu, 1957, № 6, 19—23 (польск.; рез. русск., англ.)

Методом последовательных приближений устанавливаются некоторые теоремы существования и единственности для системы уравнений:

$$y_i^{(n)}(x) = f_i\left[x, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_1^{n-1}, y_n^{n-1}, \lambda \int_a^b K_i(x, t, y_1(t), \ldots, y_n(t), \ldots, y_1^{(m)}(t), \ldots, y_n^{(m)}(t))\, dt\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; m < n.$$

В. В. Немыцкий

7943. Граничная задача для одного частного класса интегро-дифференциальных уравнений. Франкини (Un problema ai limiti per una particolare classe di equazioni integro-differenziali. Franchini Lucia), Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII, 1953—1954. **3**, 75—91 (итал.; рез. франц.)

Доказываются две теоремы о существовании в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$ решения интегро-дифференциального уравнения

$$\partial^{n+m} z(x, y)/\partial x^n \partial y^m = f\{x, y, z(x, y), \partial^{\nu+\mu} z(x, y)/\partial x^\nu \partial y^\mu, \ldots, \partial^{n+\mu} z(x, y)/\partial x^n \partial y^\mu, \ldots, \partial^{\nu+m} z(x, y)\, \partial x^\nu \partial y^m, \ldots, \int_a^x \int_c^y g[x, y, u, v, z(u, v), \ldots, \partial^{\nu+\mu} z(u, v)/\partial u^\nu \partial v^\mu, \ldots, \partial^{n+\mu} z(u, v)/\partial u^n \partial v^\mu, \ldots, \partial^{\nu+m} z(u, v)/\partial u^\nu \partial v^m]\, du dv\}, \quad (1)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1; \quad \mu = 1, 2, \ldots, m-1)$$

при условиях

$$z(x_i, y) = \varphi_{i,0}(y), \ldots, \partial^{\nu_i - 1} z(x_i, y)/\partial x^{\nu_i - 1} = \varphi_{i, \nu_i - 1}(y),$$
$$z(x, y_j) = \psi_{j,0}(x), \ldots, \partial^{\mu_j - 1} z(x, y_j)/\partial y^{\mu_j - 1} = \psi_{j, \mu_j - 1}(x), \quad (2)$$
$$i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

где $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leqslant b$, $c \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_s \leqslant d$ и $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s = m$.

Доказательство основывается на теореме Вольпато (РЖМат, 1956, 1358) о неподвижной точке функционального преобразования. Существование и единственность решения граничной задачи (1), (2) доказаны в работе Джануинцци (РЖМат, 1956, 3864) при более жестких предположениях, чем в реферируемой работе. Ю. К. Ландо

См. также: 7917, 7928

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

7944. Обучение дифференциальному и интегральному исчислению. Вальде (La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Walde Erwin von der), Ingeniería y arquit., 1956, **11**, № 132, 24, 26, 27 (исп.)

7945. О максимальном значении индекса колебания последовательности при всевозможных перестановках порядка ее членов. Бенедетти (Del massimo valore dell'indice di oscillazione in una successione di termini al variare in tutti i modi possibili l'ordine di questi. Benedetti Carlo), Metron, 1955, **17**, № 3—4, 53—60 (итал.)

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечная последовательность положительных чисел. Автор определяет максимум, который может принимать индекс колебания $\sum_1^{n-1} |a_i - a_{i+1}|/(n-1)$ при перестановке элементов последовательности. E. Lukacs

Перевод из Math. Revs. 1956, **17**, № 1, 19.

7946. О максимуме и минимуме простого индекса различия. Бенедетти (Sul massimo e sul minimo dell'indice semplice di dissomiglianza. Benedetti Carlo. Metron, 1955, **17**, № 3—4. 61—65 (итал.)

Автор рассматривает две конечные последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$, каждая из которых содержит по n действительных чисел. Он определяет максимум и минимум суммы $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$ при следующих условиях: а) обе последовательности являются неубывающими и содержат только неотрицательные числа; б) средние обоих последовательностей являются фиксированными. E. Lukacs.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 19

7947. **Экспоненциальная функция. Кемень** (The exponential function. Kemeny John G.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 3, 158—160 (англ.)

7948. **Некоторое обобщение синус-функции. Кауфман** (A generalization of the sine function. Kaufman H.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 3, 181—183 (англ.)

Изучаются решения уравнения $d^n y/dx^n \pm y = 0$. В. В. Немыцкий

7949. **Замечательные тригонометрические тождества. Робинсон** (A curious trigonometric identity. Robinson R. M.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 2, 83—85 (англ.)

7950. **Обратные тригонометрические функции и логарифмические функции, имеющие те же производные. Муста** (Funcţii trigonometrice inverse şi funcţii logaritmice care au aceeaşi derivată. Musta Şt.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, **A9**, № 1, 8—11 (рум.)

7951. **Псевдомультипликативные функции. Голдберг** (Pseudo-multiplicative functions. Goldberg Richard R.), Math. Mag., 1957, **30**, № 3, 145—148 (англ.)

Пусть E — некоторое множество неотрицательных вещественных чисел, замкнутое по отношению к умножению (т. е. $x, y \in E \to xy \in E$). Неотрицательная и неубывающая на таком множестве E функция $f(x)$ называется псевдомультипликативной, если $f(xy) \geqslant f(x) f(y)$ $(x, y \in E)$.

Элементарно доказывается ряд простых теорем, относящихся к различным операциям над псевдомультипликативными функциями и к порядку их роста. Г. М. Фихтенгольц

7952. **О равномерной сходимости последовательности функций. Оттавьяни** (Sulla convergenza uniforme delle successioni di funzioni. Ottaviani Giuseppe), Giorn. Ist. Ital. Attuari 1952 (1953), **15**, 219—234 (итал.)

В предыдущей статье (Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1949, **6**, (8), 291—297) автор дал необходимое и достаточное условие для равномерной сходимости в $(-\infty, +\infty)$ последовательности функций $f_n(x)$ ограниченной вариации к функции $f(x)$ ограниченной вариации. Здесь он прежде всего замечает, что в его предыдущей работе можно предполагать, что $f_n(x)$ является только ограниченной. Затем он обобщает эту теорему на предельную функцию $f(x)$, которая является «$a_{\alpha>1}V$ limitata» (но, вообще говоря, не ограниченной вариации). Так называется автором функция, если для каждого $\alpha > 1$

$$\sup \sum_{\nu} |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)|^\alpha$$

для всех возможных подразделений данного интервала является конечным. Делаются замечания, касающиеся некоторых упрощений условия равномерной сходимости последовательности, данного Пиконе (Picone M., Boll. Unione mat. ital., 1952, 7, ser. 3, 106—108). Наконец (как в своей предыдущей работе, цитированной выше), автор распространяет свои результаты на функции двух (или более) переменных. A. Rosenthal

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 230.

7953. **Общие критерии для определения линейной меры точечных множеств. Берг** (Allgemeine Kriterien zur Maßbestimmung linearer Punktmengen. Berg Lothar), Math. Nachr., 1955 (1956), **14**, № 4—6, 263—285 (нем.)

Дается обобщение идей Хольцера (Holzer L., Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl., 1928, **137**, 421—453). Пусть положительная функция $f(a, \xi)$ определена для натуральных a и $\xi \in [0, 1]$ и при всяком a существует непрерывная производная по ξ, $f'(a, \xi)$. Пусть $f(1, 0) \geqslant 1$ и $f(a, 0)$ произвольно мала при достаточно большом a. Предположим, кроме того, что f удовлетворяет условиям:

$$f(a, 0) \geqslant f(b, 0) \text{ для } a < b,$$

$$f(a, \xi) < f(a, \tau_l) \text{ для } \xi < \tau_l,$$

$$0 < f'(a, \xi) \leqslant f'(a, \tau_l) \text{ для } \xi < \tau_l,$$

$$f(a, 1) \geqslant f(a-1, 0).$$

Обозначим через $\xi(a)$ единственное решение уравнения

$$f(a, \xi) = f(a-1, 0) \quad (a < \xi \leqslant 1).$$

Положим $\tau_{l_0} = 1$ и определим целое число $a_1^* \geqslant 2$ и $\tau_{l_1}^* \in [0, 1]$ с помощью условий

$$f(a_1^*, 0) < \tau_{l_0} \leqslant f(a_1^* - 1, 0), \quad \tau_{l_0} = f(a_1^*, \tau_{l_1}^*).$$

Для $a_1 \geqslant a_1^*$ положим

$$\tau_{l_1} = \begin{cases} \xi(a_1), & \text{если } a_1 > a_1^*, \\ \tau_{l_1}^*, & \text{если } a_1 = a_1^*. \end{cases}$$

Если a_{n-1}^*, $\tau_{l_{n-1}}^*$, $\tau_{l_{n-1}}$ уже определены, определим $\tau_{l_n}^*$, a_n^*, τ_{l_n} с помощью соотношений:

$$f(a_n^*, 0) < \tau_{l_{n-1}} \leqslant f(a_n^* - 1, 0), \quad \tau_{l_{n-1}} = f(a_n^*, \tau_{l_n}^*),$$

$$\tau_{l_n} = \begin{cases} \xi(a_n) \text{ для } a_n > a_n^*, \\ \tau_{l_n}^* \text{ для } a_n = a_n^*. \end{cases}$$

Среди доказанных теорем отметим следующие:

1. Пусть заданная функция f удовлетворяет одному из условий: для всех $a \geqslant a_{n_0}^*$ и $n \geqslant n_0$, $f'(a, \eta) \leqslant \theta < 1$ или $f'(a, \tau_l) \leqslant 1$ и $\xi(a_n) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда для всякого числа $x \in (0, 1)$ существует система чисел $\{a_i\}$ такая, что

$$x = \{a_1, a_2, \ldots, a_n; x_n\}, \tag{1}$$

где $\{a_1, a_2, \ldots, a_n; \xi\} = f(a_1, f(a_2, \ldots f(a_{n-1}, f(a_n, \xi)))\ldots)$,

$$f(a_n, 0) < x_{n-1} \leqslant f(a_{n-1}, 0), \quad x_{n-1} = f(a_n, x_n).$$

$$0 < x_n \leqslant \tau_{l_n}, \quad a_n \geqslant a_n^*.$$

Обратно, каждой такой последовательности $\{a_i\}$ соответствует число x, которое получается из (1) при $n \to \infty$.

2. Если $f(a, \xi)$ такова, что для всякого $\delta > 0$ существует зависящее от δ число $\delta_0 < 1$ такое, что для всех n

$$[\varphi(\tau_{l_n}) - \varphi(\tau_{l_n}\delta)] : [\varphi(\tau_{l_0}) - \varphi(0)] \leqslant \delta_0, \tag{2}$$

где

$$\gamma(y) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n; y\},$$

то всякое измеримое множество M элементов $x \in (0, 1)$, таких, что вместе с $x \in M$ каждое соответствующее ему $x_n \in M$, является гомогенным.

3. Множество чисел x, параметры a_n которых удовлетворяют соотношению $a_n = 2 + k$, где k — фиксированное натуральное число, самое большее для конечного числа значений n, в случае $\tau_m = 1$ имеет меру нуль.

Дано также достаточное условие для выполнения (2).

М. Д. Калашников

7954. О неравенстве Борга. Кордес (An inequality of G. Borg. Cordes H. O.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 1, 27—29 (англ.)

В статье Борга (Borg, Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen, Arkiv mat., astron. och fys., 1945, **31**) в предположении непрерывности $y(x)$, абсолютной непрерывности $y'(x)$ на $0 \leqslant x \leqslant l$; $y > 0$ внутри $0 < x < l$; $y(0) = y(l) = 0$, доказывается неравенство

$$\int_0^l \left| \frac{y''}{y} + k \right| dx \geqslant \begin{cases} 2\sqrt{k}\operatorname{ctg}\dfrac{\sqrt{k}l}{2}, & 0 < k < \dfrac{\pi^2}{l^2}, \\ k\left(l - \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}\right), & k > \dfrac{\pi^2}{l^2}. \end{cases}$$

В этой заметке приведено простое доказательство неравенства Борга в предположении, что y и y' непрерывны, а y'' кусочно-непрерывна на $0 \leqslant x \leqslant l$.

М. И. Ельшин

7955. О непрерывности интегрального оператора. Ирон (Sur la continuité d'un opérateur intégral. Huron Roger), Ann. Fac. Sci Univ. Toulouse, 1952 (1953), (4) **16**, 140—152 (франц.)

Если ψ непрерывна на $[a, b]$, $\gamma(h) = \max |\psi(x) - \psi(y)|$ для $|x - y| \leqslant h$ и $\int_0^h \gamma(x)\, x^{-1} dx < \infty$, то автор доказывает, что интеграл $U(\varepsilon) = \int_a^b [\psi(\varepsilon) - \psi(s)]\,(\varepsilon - s)^{-1} ds$ непрерывен в (a, b). Непрерывность в точках a и b доказывается в предположении, что $\gamma(h) \log(h^{-1}) \to 0$ при $h \to 0$.

W. Rudin

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 224.

7956. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов с переменным пределом и соответствующие им оценки. Муратов Л. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 8, 76—90

Рассматривается $\int_a^b f(t)\, dt$, где b — единственная особая точка (конечная или нет), $f(t) > 0$ при $t \in (b - \varepsilon, b)$. Из доказанных признаков отметим следующий: Если существует $g(t) < 0$ такая, что

$$A = \lim_{t \to b-0} (f(t) \cdot g(t))' : f(t) > 0, \text{ то } \int_a^b f(t)\, dt$$

сходится.

Указаны частные признаки при специальном выборе $g(t)$. Пользуясь при доказательстве правилом Лопиталя, автор не формулирует четко соответствующих ограничений на функции $f(t)$ и $g(t)$. Даны простые оценки. Имеются примеры.

Б. М. Макаров

7957. Улучшение сходимости несобственных интегралов. Вычисление некоторых интегралов разложением в ряд. Муратов Л. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 8, 105—118

Применительно к несобственным интегралам развивается метод А. Н. Крылова улучшения сходимости рядов Фурье. Признаки сходимости несобственных интегралов, приведенные в работе, неверны. Интеграл

$$\int_2^\infty \frac{\sin^2 t}{\ln t}\, dt = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1 - \cos 2t}{\ln t}\, dt,$$

сходимость которого следует из обоих указанных признаков, очевидно, расходится (Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II, Гостехиздат, 1948, стр. 582—584, примеры 7 и 8).

Б. М. Макаров

7958. Практическое вычисление интегралов. Абрамович (On the practical evaluation of integrals. Abramowitz Milton), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1954, **2**, № 1, 20—35 (англ.)

Автор на примерах дает обзор различных путей для практического вычисления интегралов, содержащих параметры. Пути эти не новы: они используют разложения в ряды, функциональные соотношения, выделение сингулярной части, сведение к дифференциальному уравнению, преобразование Лапласа, контурные интегралы.

Г. М. Фихтенгольц

7959. О среднем арифметическом. Фаринья (Sur la moyenne arithmétique. Farinha João), Rev. Fac. ciênc. Univ. Coimbra, 1954, **23**, 14—16 (франц.)

7960. Обобщенный среднеарифметический оператор. Самнер (A generalized averaging operator. Sumner D. B.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 3, 437—446 (англ.)

Для вычисления обобщенных эйлеровых чисел Милн-Томсон (Milne-Thomson L., Proc. London Math. Soc., 1933, ser. **2**, **35**, 514—522) использовал ∇^N, где

$$\nabla f(z) = \tfrac{1}{2}[f(z + h) + f(z)].$$

$$\nabla^N f(z) = \nabla\nabla^{N-1} f(z) = \sum_0^N \binom{N}{p} f(z + ph)\, 2^{-N}. \qquad (1)$$

Автор дает обобщение идеи Милн-Томсона. Он определяет следующий обобщенный среднеарифметический оператор $\nabla^\lambda f(z)$ (λ связано с целым числом N неравенством $N - 1 < \lambda \leqslant N$):

$$\nabla^\lambda f(z) = \frac{1}{2^\lambda}\sum_0^{N+1} \binom{N+1}{p} e^{phD} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(-hDw)\, dw}{2\pi i E(\mu, w)} f(z) =$$

$$= \sum_0^{N+1} \binom{N+1}{p} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(z + ph - hw)\, dw}{2\pi i E(\mu, w)\, 2^\lambda}, \qquad (2)$$

где 1) $\mu = N + 1 - \lambda$, 2) $E(\mu, w) = \Gamma(\mu)\,\Gamma(w)\,\Gamma(\mu - w)$, 3) $\exp(kD) f(z) = f(z + k)$, 4) $0 < c < \mu$, 5) $f(z)$ — целая функция экспоненциального порядка k, $kh < \pi$.

При этих условиях доказано, что если $\varphi(z, h)$ есть функция, определенная формулой (2), то она является целой функцией экспоненциального порядка k (по отношению к z) и $\lim_{h \to 0} \varphi(z, h) = f(z)$. (В частном случае $\lambda = N$, обобщенный оператор ∇^λ совпадает с оператором, определенным формулой (1)). Далее автор устанавливает экспоненциальное свойство оператора ∇^λ:

$$\nabla^\alpha \nabla^\beta f(z) = \nabla^{\alpha+\beta} f(z).$$

После этого определяет числа g_k^λ и полиномы $g_k^\lambda(z)$ (связанные с ∇^λ) следующим образом:

$$2^\lambda/(1 + \exp t)^\lambda = \sum_0^\infty g_k^\lambda t^k/k! \quad (|t| < \pi).$$

$$g_k^\lambda(z) = \sum_0^k \binom{k}{m} z^{k-m} g_m^\lambda.$$

Для полиномов $g_k^{\lambda}(z)$ дается производящее соотношение

$$2^{\lambda}\exp(zt)/(1+\exp t)^{\lambda}=\sum_0^{\infty}t^k g_k^{\lambda}(z)/k!,$$

а для чисел g_k^{λ} явное выражение

$$g_k^{\lambda}=(-)^k\sum_{p=1}^{k}S_k^p\Gamma(\lambda+p)\,\Gamma(\lambda)\,2^p,$$

в котором участвуют числа Стирлинга S_k^p.

Дается определение оператора $\nabla^{-\lambda}\varphi(z)$ и доказательство того, что он является обратным к $\nabla^{\lambda}f(z)$; доказывается также, что его порядок есть k ($kh<\pi$) при условии, что порядок $\varphi(z)$ есть k.

Хр. Карапиколов

7961. Средние значения и полигармонические полиномы. Фридман (Mean-values and polyharmonic polynomials. Friedman Avner), Michigan Math. J., 1957, 4, № 1, 67—74 (англ.)

Обозначая через $[(\alpha,\beta),\ n,\ R,\ \varphi]$ правильный n-угольник с центром (α,β) и с вершинами

$$\left\{\alpha+h\cos\left(\varphi+\frac{2k\pi}{n}\right),\ \beta+h\sin\left(\varphi+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\},$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad R=h\cos\frac{\pi}{n},$$

автор вводит следующее определение: Суммируемая функция $u(x,\ y)$ называется обладающей в области $D(p,\ n,\ \varphi)$-свойством, если для каждого $(\alpha,\ \beta)\in D$ существуют частные производные $\Delta^j u(\alpha,\ \beta)$ ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$) и если для достаточно малых значений R имеем

$$\frac{1}{sR^2}\iint\limits_{[(\alpha,\beta),\,n,\,R,\,\varphi]}u(x,\ y)\,dxdy=u(\alpha,\ \beta)+\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\gamma_{j,\,n}R^{2j}\Delta^j u(\alpha,\ \beta)}{(2^j j!)^2(j+1)},$$

где s — площадь $[(0,\ 0),\ n,\ 1,\ 0]$, а

$$\gamma_{1,\,n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cos^2(\pi/n)},$$

$$\gamma_{k,\,n}=\frac{2k\gamma_{k-1,\,n}}{2k+1}+\frac{1}{(2k-1)\cos^{2k}(\pi/n)}.$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $u(x,\ y)$ обладала свойством $(1,\ n,\ \varphi)$ таково: Функция $u(x,\ y)$ должна быть гармоническим полиномом степени $\leqslant n$ и n-я производная функции $u(x,\ y)$ в φ-направлении должна равняться нулю. Если же дано, что функция $u(x,\ y)$, определенная в области D, имеет в ней производные первых $2p$ порядков и обладает свойством $(p,\ n,\ \varphi)$ $n>2p$, то функция $u(x,\ y)$ должна быть p-гармоническим полиномом степени $\leqslant pn$ и производная pn го порядка в φ-направлении должна равняться нулю.

Результаты автора являются обобщением результатов Бекенбаха, Рида и Уолша (Beckenbach E. F., Reade M., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 230—238; Duke Math. J., 1945, 12, 629—644; Reade M. O., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 55—63; Walsh J. L., Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 923—930).

Я. Л. Геронимус

7962. Изучение полиномов $S_n(x)$ проф. Сан-Хуана и замечание о $|D^n e^{-e^t}|^{1/n}$ в $(0,+\infty)$. Ибаньес-Гарсия (Estudio de los polinomios $S_n(x)$, del prof. R. San Juan y acotación $|D^n e^{-e^t}|^{1/n}$, en $(0,+\infty)$. Ibáñez García Carlos), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1956, 50, № 4, 471—516 (исп.)

7963. О некоторых системах полиномов. Энгелис Г. К., Уч. зап. Латв. ун-та, 1956, 8, № 2, 55—66 (рез. лат.)

Рассматриваются системы полиномов, обобщающие (на действительной прямой) ортогональные системы полиномов. Ортогональность заменяется биортогональностью по отношению к другим системам функций, в большинстве случаев также полиномов, и исследуется в какой мере сохраняются или как расщепляются их свойства.

В § 1 дается понятие биортогонализации двух последовательностей; в § 2 изучается некоторый аналог формулы Родрига из теории классических полиномов; в § 3 рассматриваются дифференциальные уравнения, связанные с одним классом биортогональных систем.

Г. Н. Савин

7964. Гармонический анализ быстрорастущих функций. Коренблюм Б. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 201—203

Одна из формулировок классической тауберовой теоремы Винера, как известно, состоит в утверждении, что в нормированном кольце преобразований Фурье $\psi(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ абсолютно интегрируемых функций $\varphi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ с формально присоединенной единицей, замкнутый примарный идеал, отвечающий бесконечно удаленной точке носителя, совпадает с соответствующим максимальным идеалом. Автор рассматривает нормированное кольцо L_a преобразований Фурье $\psi(s)$ функций φx $(-\infty<x<\infty)$, абсолютно интегрируемых с весом $e^{\alpha|x|}$ ($\alpha>0$ фиксировано), также с формально присоединенной единицей. Носителем этого кольца является полоса $s=\sigma+i\tau$, $-\infty<\sigma<\infty$, $|\tau|\leqslant\alpha$, с одной бесконечно удаленной точкой M_∞. В этом случае, как показывает автор, теорема Винера не сохраняется: оказывается, существуют замкнутые примарные идеалы $I\subset M_\infty$, отличные от M_∞. Автор дает их полное описание. Каждый идеал $I\subset M_\infty$ определяется двумя неположительными числами γ_1 и γ_2 и состоит из всех функций $\psi(s)\in L_a$, которые удовлетворяют условиям

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln|\psi(\sigma)|}{e^{\pi\sigma/2\alpha}}\leqslant\gamma_1,\quad \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln|\psi(\sigma)|}{e^{\pi\sigma/2\alpha}}\leqslant\gamma_2.$$

Двойственная формулировка классической теоремы Винера (эквивалентная исходной) утверждала, что в слабо замкнутой линейной оболочке сдвигов ограниченной функции $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, всегда имеется функция $e^{i\sigma x}$ при некотором σ. Двойственная формулировка теоремы, доказанной автором, гласит: в слабо замкнутой линейной оболочке W_f сдвигов функции $f(x)$, ограниченной в произведении с $e^{-\alpha|x|}$ (в соответствующей топологии) имеется или функция

$$e^{i\sigma x},\tag{1}$$

или функция

$$g^{-i\mu_1 x}/\Gamma(1+2i\alpha x/\pi),\tag{2}$$

или функция

$$e^{-i\mu_2 x}/\Gamma(1-2i\alpha x\pi).\tag{3}$$

Наконец, указывается следующая теорема спектрального синтеза: если для данной функции $f(x)$, ограниченной в произведении с $e^{-\alpha|x|}$, множество пока-

зателей μ_1 и μ_2, участвующих в выражениях (2), (3), для всех элементов W_f пусто, а множество показателей σ ограничено, то $f(x)$ есть целая функция экспоненциального типа. Доказательства не приводятся.
Г. Е. Шилов

7965. Представление иррациональности любой степени в виде правильной непрерывной дроби с целыми компонентами. Смит (Expression of irrationals of any degree as regular continued fractions with integral components. Smith G. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 2, 86—88 (англ.)

Исходя из представления $f(x+h)$ в виде непрерывной дроби

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{rf(x) +} \; \frac{h}{2rrf(x) +} \; \frac{h}{3rr_2f(x) +} \cdots,$$

где $rf(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $r_2f(x) = f(x) + 2rrf(x)$,

$$r_nf(x) = r_{n-2}f(x) + nrr_{n-1}f(x),$$

автор получает следующее выражение для корня m-й степени из целого числа N:

$$N^{1/m} = a + \frac{\beta}{ma^{m-1} +} \; \frac{\beta(m-1)}{2a +} \; \frac{\beta(m+1)}{3ma^{m-1} +}$$

$$\frac{\beta(2m-1)}{2a +} \; \frac{\beta(2m+1)}{5ma^{m-1} +} \cdots$$

где $N = a^m + \beta$, и

$$N^{l/m} = a + \frac{\beta l}{ma^{(m-l)/l} +} \; \frac{\beta(m-l)}{2a +} \; \frac{\beta(m+l)}{3ma^{(m-l)/l} +} \cdots,$$

где $N = a^{m/l} + \beta$.
Э. А. Чернышенко

7966. К закону дистрибутивности для действительных чисел. Голомб (Zum distributiven Gesetz der reellen Zahlen. Gołąb S.), Studia math., 1956, **15**, № 3, 353—358 (нем.)

Автор исследует следующее функциональное уравнение — закон дистрибутивности:

$$g[f(x, y), z] = f[g(x, z), g(y, z)];$$

ищутся две действительные функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$.

Если предположить, что функции, удовлетворяющие этому уравнению, удовлетворяют следующим условиям: 1) они определены во всей плоскости x, y, 2) всюду непрерывны вместе с первыми производными, 3) существует число a такое, что $f(x, a) = f(a, x) = x$ для всех x, 4) существует число e такое, что $g(e, x) = x$ для всех x, 5) $g(a, x) = g(x, a) = a$ для всех x, 6) уравнение $f(b, x) = c$ разрешимо относительно x при всяких b и c; тогда оказывается, что эти функции имеют следующий вид:

$$f(x, y) = \Omega[\omega(x) + \omega(y)], \qquad (1)$$

$$g(x, y) = \Omega[\omega(x)\,\omega(y)], \qquad (2)$$

где ω — функция, определенная на всей прямой и строго монотонна, а Ω — функция, обратная к ω (Множество значений функции ω является всей прямой. Реф.).

Наоборот, если f и g — функции вида (1) и (2), где ω — функция, описанная выше, а Ω — по отношению к ней обратная, то, как легко проверить, закон дистрибутивности, равно как и вышеприведенные условия, за исключением, быть может, условия 2), будут для них выполнены.
H. Fast

7967. Системы разностных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Лонго (I sistemi di equazioni lineari alle differenze a coefficienti costanti. Longo Antonio), Industria (Milano), 1954, № 3, 370—386 (итал.)

Автор сжато излагает вопрос о решении разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_1(x+1) = a_{11}y_1(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) + f_1(x),$$

$$y_2(x+1) = a_{21}y_1(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) + f_2(x), \qquad (1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(x+1) = a_{n1}y_1(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) + f_n(x).$$

При помощи замены $\sum_{x=0}^{\infty} z^x y_k(x) = F_k(z)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, уравнения (1) сводятся к некоторой системе линейных уравнений с неизвестными $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., $F_n(z)$. Разрешая эту систему уравнений, автор находит явные выражения для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Дается один пример на приложение. Указанное решение уравнений (1) дано также Обрешковым (Statist. math., Acta. scient. ind., 1937, № 470) и изложение автора имеет много общего с изложением Обрешкова, на основании результатов которого выполнена работа.
Н. Обрешков

7968. О высших разностях. III. Дальнейшие определения и теоремы. Чакрабарти (On higher differences. Nota III. Further definitions and theorems. Chakrabarti S. C.), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 105—121 (англ.)

Пусть u_x — функция от x, (x_0, x_1, x_2) — функция трех переменных x_0, x_1, x_2, а v_0, v_1, v_2, w_0, w_1 — произвольные числа. Вводятся операторы V^r, V_r, определяемые равенствами

$$V^r u_x = V^{r-1}u_{x+1} - w_{r-1}V^{r-1}u_x, \quad V^0 u_x = u_x;$$

$$V_r(x_0, x_1, x_2) = V_{r-1}(v_0x_0, v_1x_1, v_2x_2) -$$

$$- w_{r-1}V_{r-1}(x_0, x_1, x_2), \qquad V_0(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, x_2).$$

Эти операторы являются обобщением операторов A^r, A_r, изученных автором (РЖМат, 1955, 5882).

Рассматриваются некоторые соотношения, связанные с операторами V^r, V_r, обобщающие аналогичные соотношения для A^r, A_r. Приводится аналог интерполяционной формулы. Так же как и для операторов A^r, A_r даны формулы, выражающие $V^r u_x$, $V_r(x_0, x_1, x_2)$ через производные u_x, (x_0, x_1, x_2) и du_x/dx через V^0u_x, V^1u_x, ... в случае, когда u_x и (x_0, x_1, x_2) — многочлены.
Г. П. Сафронова

7969 К. Руководство по задачам из курса общей математики. I. Изд. 2-е. Булиган, Ривo (L'enseignement des mathématiques générales par les problèmes, à l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales, des élèves des classes de mathématiques supérieures et de mathématiques spéciales, des candidats aux grandes écoles. I. 2e éd. Bouligand G., Rivaud J. Paris, Vuibert, 1956, VI+373 p., ill., 1920 fr. (франц.)

Второе издание книги под тем же названием (РЖМат, 1954, 4463 К) выходит в двух томах. I-й том содержит материал до гл. 12 части 3 первого издания.
М. К. Керимов

7970 К. Математический анализ. Т. 4. Изд. 2-е, дополненное. Погожельский (Analiza matematyczna. T. 4. Wyd. 2 uzup. Pogorzelski Witold. Warszawa, PWN, 1956, 400 s., il., 20, 60 zł), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 9, 118 (польск.)

7971 К. Курс математического анализа. (Для вузов). Т. 1. Изд. 2-е. Толстов Г. П. М., Гостехиздат, 1957, 551 стр., илл., 11 р. 40 к.
Второе издание (первое издание см. РЖМат, 1956, 3100 К), печатается без существенных изменений (сделаны некоторые мелкие улучшения и исправлены замеченные опечатки).

7972 К. Курс высшей математики. Для 3 и 4 курсов техникумов. Изд. 3. Тарасов (Курс по висша математика. За III и 4 курс на техникумите. (3 изд.) Тарасов Н. П. Прев. от рус. София, Нар. просв., 1956, 278 стр., 8.75 лв.), Българ. книгоп., 1956, **60**, № 11, 21 (болг.)

7973 К. Что такое дифференцирование? Болтянский (Differentialrechnung einmal anders. Boltjanski W. G., Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss, 1956, 60 S., ill.) (нем.)
Перевод с русского (РЖМат, 1957, 534К).

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

7974. Суммирование бесконечных рядов с помощью дельта-функции. Намики (デルタ函數を用いる無限級數總和法について. 並木美喜雄), 電氣通信學會雜誌, Дэнки цусин гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Commun. Engrs Japan, 1957, **40**, № 1, 64—67 (японск.)

7975. О множителях суммируемости и родственных вопросах при преобразовании Чезаро. 1. Пейеримхофф (Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren. 1. Peyerimhoff Alexander), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 139—156 (нем.)
Работа представляет собой обобщение идей Шура (Schur I., J. reine und angew. Math. 1921, **151**, 79—111). В работе содержится 13 теорем из теории линейных преобразований бесконечных последовательностей и числовых рядов. Положим

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (A)$$

Тогда результатом, типичным для § 1 работы (теоремы 1, 2, 3), будет, например, следующий.
Теорема 1. Для того чтобы (A) существовало для всех ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ и чтобы $\{y_n\}$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $z_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x_\nu$ существовало для всех последовательностей $\{x_n\}$ таких, что $\sum |x_n|$ сходится, причем $\sum |z_n|$ также сходится. Для § 2 работы (теоремы 4—7) типичен следующий результат. Пусть $a_{n\nu}$ — матрица такая, что $a_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $a_{n\nu} = 0$ для $\nu > n$. Пусть далее $a'_{n\nu}$ — матрица, обратная к матрице $a_{n\nu}$, $b_{n\nu}$ — некоторая треугольная матрица и $\{\varepsilon_n\}$ — числовая последовательность. Положим

$$z_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n\nu} y_\nu, \qquad (B)$$

где

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} x_\nu, \qquad A_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} b_{n\mu} a'_{\mu\nu} \varepsilon_\mu.$$

Теорема 4. Любая последовательность $\{x_n\}$ с $y_n = O(1)$ преобразуется посредством (B) в ограниченную последовательность $\{z_n\}$, если для всех $\{\alpha_n\}$ с $\sum |\alpha_n| < \infty$ ряд $\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu} \alpha_n$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ сходится и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu} \alpha_n \right| < \infty.$$

В § 5 работы устанавливаются предложения следующего типа (теоремы 8—10).
Теорема 8. Последовательность $\{\varepsilon_n\}$ преобразует каждый C_α-суммируемый ряд $\sum a_\nu$ $(\alpha \geqslant 0)$ в C_β-суммируемый ряд $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ $(\beta \geqslant 0)$, если $\varepsilon_n = O(1)$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n|$ сходится для каждой последовательности $\{\delta_n\}$ такой, что $\delta_n = o(1)$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha |\Delta^{\beta+1} \delta_n| < \infty.$$

Здесь $\Delta^\beta \delta_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{-\beta-1} \delta_\nu$, A_n^α — коэффициент при x^n в степенном ряде $(1-x)^{-(\alpha+1)}$. Для § 6 работы (теоремы 11—13) типичным является следующее предложение.
Теорема 11. Пусть $\alpha \geqslant 0$, α — целое и $\beta \geqslant 0$. Тогда последовательность $\varepsilon_n = O(1)$ удовлетворяет условиям таким же, как в теореме 8, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty$$

и, кроме того, $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha})$ для $\beta \leqslant \alpha$.
Основная идея автора — это использование теоремы, что сопряженный оператор с линейным оператором также линейный.
Примечание референта. В формуле 19 (стр. 144) пропущен знак равенства. В формуле 42 (стр. 151) в скобках должно быть $(n+1)$.
И. И. Огиевецкий

7976. О множителях суммируемости и родственных вопросах при преобразовании Чезаро. II. Пейеримхофф (Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren. II. Peyerimhoff Alexander), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, **10**, 1—18 (нем.)
Продолжение ранее опубликованной работы (реф. 7975).
Работа содержит ряд специальных основных (14—20) и вспомогательных (11—16) теорем из теории числовых рядов, слишком сложно формулируемых, для того чтобы их полностью приводить. Для иллюстрации приведем две наименее громоздкие. Пусть $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$, $\Delta^\alpha u_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{-\alpha-1} u_\nu$, $\Delta^\alpha u_n$ — разность порядка α последовательности u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где A_n^α — коэффициент при x^n в степенном ряде для $(1-x)^{-(\alpha+1)}$. Тогда справедливы, например, следующие утверждения.
Теорема 19. Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$. Тогда последовательность $\varepsilon_n = O(1)$ удовлетворяет условию $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n| < \infty$ для всех δ_n таких, что $\delta_n = o(1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\beta |\Delta^{\beta+1} \delta_n| < \infty$, если выполняются условия

$$\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha}) \text{ для } \beta \leqslant \alpha \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty.$$

Теорема 20. Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$. Тогда последовательность $\varepsilon_n = O(1)$ удовлетворяет условию $\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = O(1)/n^{\alpha+1}$ $(n \to \infty)$ для всех δ_n таких, что $\delta_n = o(1)$, $\Delta^\beta \delta_n = O(1)/n^{\beta+1}$ $(n \to \infty)$, если выполнено условие $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha})$ для $\beta \leqslant \alpha$ и $\Delta^\alpha (\varepsilon_n/n) = O(1)/n^{\alpha+1}$ $(n \to \infty)$.
И. И. Огиевецкий

7977. О некоторых задачах анализа Фурье. Чандрасекхаран (On some problems in Fourier ana-

lysis. Chandrasekharan K.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 85—91 (англ.)

Дается краткий обзор современного состояния теории кратных рядов и интегралов Фурье. Особое внимание уделено следующим проблемам: 1) проблеме локализации, 2) проблеме единственности, 3) связи кратных рядов Фурье с числом целых точек в сфере и эллипсоиде. Формулируются некоторые нерешенные задачи.

Примечание референта. Автор высказывает в качестве предположения (на стр. 89), что для функций с интегрируемым квадратом модуля имеет место равная суммируемость порядка $(k-1)/2$ (k — размерность пространства) ряда и интеграла Фурье. Референтом показано, что это действительно так (РЖМат, 1953, 753). Б. М. Левитан

7978. О сходимости кратных рядов. Оссичини (Sulla convergenza di serie multiple. Ossicini Alessandro), Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **21**, № 6, 382—386 (итал.)

Доказываются следующие теоремы:

1. Если n-кратный числовой ряд

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{0,\infty} (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$$

вполне сходится, то n-кратный степенной ряд

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{0,\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} (z_1 - \tau_1)^{i_1} (z_2 - \tau_2)^{i_2} \ldots (z_n - \tau_n)^{i_n}$$

является вполне сходящимся равномерно относительно z_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant \frac{|z_s|}{|\tau_s| - |z_s - \tau_s|} \leqslant K_s,$$

где $K_s \geqslant 1$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

2. Если n-кратный числовой ряд

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{0,\infty} (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tau_1^{-i_1} \tau_2^{-i_2} \ldots \tau_n^{-i_n}$$

вполне сходится, то n-кратный степенной ряд

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{0,\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} (z_1 - \tau_1)^{-i_1} (z_2 - \tau_2)^{-i_2} \ldots (z_n - \tau_n)^{-i_n}$$

вполне сходится равномерно относительно z_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant \frac{|z_s|}{|z_s - \tau_s| - |\tau_s|} \leqslant K_s,$$

где $K_s \geqslant 1$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Определение вполне сходящихся n-кратных рядов дано, например, Муром (Moore C. N., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1936, **22**, 34). И. И. Огиевецкий

7979. Об обобщении геометрического ряда. Кламкин (On a generalization of the geometric series. Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 2, 1—93 (англ.)

Доказывается следующая формула для суммы обобщенного геометрического ряда:

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^n x^s = (1-x)^{-n-1} \sum_{r=0}^{\infty} x^{r+1} (1-x)^{n-r} \Delta^r 1^n. \qquad (1)$$

Путем сравнения (1) с ранее установленным Столли (Stalley R., Amer. Math. Monthly, 1949, 56 325) выражением для $\sum_{s=1}^{\infty} s^n x^s$ выводится тождество

$$\sum_{s=0}^{n} x^{s+1} (1-x)^{n-s} \Delta^s 1^n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \binom{n+1}{m-1} (r-m+1)^n x^r.$$

А. Г. Школьник

7980. Заметка о квазихаусдорфовом преобразовании ряда в ряд. Рамануджан (A note on the quasi-Hausdorff series-to-series transformations. Ramanujan M. S.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 1, 27—32 (англ.)

Преобразование, переводящее ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ в другой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, называют квазихаусдорфовым, если последовательность b_n определена следующим образом:

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{nk}^* a_k,$$

где $\lambda_{nk}^* = 0$ $(k < n)$, $\lambda_{nk}^* = \binom{k}{n} \Delta^{k-n} \mu_n$ $(k \geqslant n)$ и моментная последовательность μ_n определяется из формулы $\mu_n = \int_0^1 u^n d\chi(u)$, причем функция $\chi(u)$ имеет ограниченную вариацию в $0 \leqslant u \leqslant 1$. $\chi(0) = 0$. Если $\chi(+0) = 0$ и $\chi(1) = 1$, то μ_n называют регулярной моментной последовательностью. Если μ_n — моментная последовательность и $\chi(+0) = 0$, то μ_n называют полурегулярной моментной последовательностью. Автор говорит, что ряд принадлежит к классу β, если его частные суммы ограничены. Приведем некоторые теоремы.

Теорема 1. 1) Пусть μ_n — полурегулярная моментная последовательность и μ_n'/μ_n — регулярная моментная последовательность. Тогда для рядов класса β, $(H^*, \mu') \supset (H^*, \mu)$, где (H^*, μ) — квазихаусдорфов метод суммирования с моментной последовательностью $\mu(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots)$.

2) Пусть μ_n и μ_n'/μ_n — полурегулярные моментные последовательности. Тогда для рядов класса β, (H^*, μ') не слабее, чем (H^*, μ).

Теорема 2. Для рядов класса β, $(H^*, (p')^n) \supset (H^*, p^n)$, если $0 < p' < p < 1$.

Преобразование ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ консервативно, если из сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ вытекает сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Говорят, что преобразование ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ абсолютно консервативно, если из сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ вытекает сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$; оно абсолютно регулярно если, кроме того, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится к той же сумме, что и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Теорема 5. Преобразование (H^*, μ) ряда в ряд абсолютно консервативно тогда и только тогда, когда оно консервативно. Преобразование (H^*, μ) ряда в ряд абсолютно регулярно тогда и только тогда, когда оно регулярно. И. И. Огиевецкий

7981. О целых трансцендентных числах рода нуль. Русско (Sulle trascendenti intere di genere zero. Russo Salvatore. Matematiche, Catania, 1953, 8, № 1, 3—9) (итал.)

Показывается, что соотношения Ньютона между степенными суммами $\sum \alpha^k$ и симметрическими функциями $c_p = \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ n переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ остаются в силе для бесконечной последовательности α, если $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$. Применение к $\alpha_j = (\pi j)^{-2}$ легко приводит к хорошо известному рекуррентному соотношению между числами Бернулли, так как c_p в этом случае можно подсчитать из степенного ряда для $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/n^2\pi^2) = z^{-1/2}\sin(z^{1/2})$. Другие рекуррентные соотношения получаются таким же способом из $\cos(z^{1/2})$ и $\cosh(z^{1/2}) \pm \cos(z^{1/2})$. W. H. J. Fuchs

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 239.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

7982. О гипергеометрических функциях высшего порядка. Нёрлунн (Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. N örlund N. E. Kgl. danske vid. selskab., Mat.-fys. skr., 1956, 1, № 2, 47 p.) (франц.)

1. Рассматриваются гипергеометрические ряды

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_\nu \ldots (\alpha_n)_\nu}{\nu!\,(\gamma_1)_\nu \ldots (\gamma_{n-1})_\nu} z^\nu, \qquad (1)$$

где $(\alpha)_\nu = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)$; $(\alpha)_0 = 1$, причем

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}\end{matrix}\right) = F\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}\end{matrix}\middle| 1\right).$$

Гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$z^n(1-z)\frac{d^n y}{dz^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1}(a_\nu - b_\nu z)\, z^\nu \frac{d^\nu y}{dz^\nu} = 0$$

с помощью оператора $\vartheta y = z\,dy/dz$ записывается в виде

$$(\vartheta - \gamma_1)\ldots(\vartheta - \gamma_n)\, y - z(\vartheta + \alpha_1)\ldots(\vartheta + \alpha_n)\, y = 0. \qquad (2)$$

В круге $|z| < 1$ уравнение (2) имеет n решений:

$$y_s = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\gamma_s + \alpha_\nu)}{\Gamma(\gamma_s + \gamma_\nu + 1)} z^{\gamma_s} \times$$

$$\times F\left(\begin{matrix}\gamma_s + \alpha_1 \ldots \gamma_s + \alpha_n \\ \gamma_s - \gamma_1 + 1 \ldots * \ldots \gamma_s - \gamma_n + 1\end{matrix}\middle| z\right), \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

где знак * указывает, что нужно опустить $\gamma_s - \gamma_s + 1$. Решения y_s линейно независимы, если все разности $\gamma_s - \gamma_k$ при $s \neq k$ нецелые. В круге $|z| > 1$ уравнению (2) удовлетворяют ряды:

$$\bar{y}_s = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_s + \gamma_\nu)}{\Gamma(\alpha_s + \alpha_\nu + 1)} z^{-\alpha_s} \times$$

$$\times F\left(\begin{matrix}\alpha_s + \gamma_1 \ldots \alpha_s + \gamma_n \\ \alpha_s - \alpha_1 + 1 \ldots * \ldots \alpha_s - \alpha_n + 1\end{matrix}\middle| \frac{1}{z}\right).$$

Аналитические продолжения функций y_s и $\bar{y}_s$ связаны соотношениями

$$y_s = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pi i(\gamma_s + \alpha_r)}}{\sin\pi(\gamma_s + \alpha_r)} \bar{B}_r \bar{y}_r;$$

$$\bar{y}_s = \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pi i(\alpha_s + \gamma_r)}}{\sin\pi(\alpha_s + \gamma_r)} B_r y_r,$$

где

$$B_r = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} \sin\pi(\gamma_r + \alpha_\nu)}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq r}}^{n} \sin\pi(\gamma_\nu - \gamma_r)}; \qquad \bar{B}_r = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} \sin\pi(\alpha_r + \gamma_\nu)}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq r}}^{n} \sin\pi(\alpha_\nu - \alpha_r)}.$$

Если $\beta_n = n - 1 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \gamma_i)$ не является целым отрицательным числом, то уравнение (2) имеет решение $\xi_n(z)$, которое в круге $|z-1| < 1$ разлагается в ряд

$$\xi_n(z) = z^{\gamma_s}(1-z)^{\beta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu,n}^{(i)}}{(\beta_n+1)_\nu}(1-z)^\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $C_{0,n}^{(i)} = 1$, а $C_{\nu,n}^{(i)}$ — целые рациональные функции от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Функция $\xi_n(z)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\int_0^1 z^{x-1}\xi_n(z)\,dz = \Gamma(\beta_n+1)\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\gamma_s)}{\Gamma(x-\alpha_s+1)},$$

где $\mathrm{Re}\,\beta_n > -1$, $\mathrm{Re}(x+\gamma_s) > 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_1^\infty z^{x-1}\xi_n(z)\,dz = \Gamma(\beta_n+1)\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_s - x)}{\Gamma(1-\gamma_s-x)},$$

где $\mathrm{Re}\,\beta_n > -1$, $\mathrm{Re}(x-\alpha_s) < 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

2. Рассматривается интегральное представление решений

$$y_s(z) = \frac{z^{\gamma_s}}{2i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(1-z)^{x-\gamma_s}}{\sin\pi(\gamma_s - x)} \frac{\pi g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\beta_n + \gamma_s - x)}, \qquad (3)$$

причем точки γ_s и $\beta_n + \gamma_s$ лежат справа, а $-\alpha_i$ слева от пути интегрирования, $\mathrm{Re}(\alpha_i + \beta_n + \gamma_s) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_i + \gamma_s) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В интеграле (3) справа от пути интегрирования имеются две последовательности простых полюсов $\beta_n + \gamma_s + \nu$ и $\gamma_s + \nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Сумма вычетов относительно первой последовательности равняется $\Gamma(-\beta_n)\,\xi_n(z)$, а полюсы $\gamma_s + \nu$ дают ряд

$$\varphi_s(z) = \frac{\pi z^{\gamma_s}}{\sin\pi\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_s(\gamma_s+\nu)(1-z)^\nu.$$

Мы получаем

$$y_s(z) = \Gamma(-\beta_n)\,\xi_n(z) + \varphi_s(z),$$

где $\varphi_s(z)$ — голоморфна в точке $z=1$. Неголоморфное при $z=1$ решение может быть представлено интегралом

$$\xi_n(z)=\Gamma(\beta_n+1)\frac{z^{\gamma_s}}{2i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{(z-1)^{x-\gamma_s}g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\beta_n+\gamma_s-x)}, \qquad (4)$$

где полюсы $\beta_n+\gamma_s+\nu$ лежат справа, а остальные полюсы — слева от пути интегрирования.

Из формул (3) и (4) следует, что голоморфное слагаемое $\varphi_s(z)$ для всех z, кроме действительных и меньших единицы, может быть представлено интегралом

$$\varphi_s(z)=\frac{\pi z^{\gamma_s}}{2i\sin\pi\beta_n}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{(z-1)^{x-\gamma_s}g_s(x)\,dx}{\sin\pi(\gamma_s-x)},$$

где полюсы $\gamma_s+\nu$ лежат справа, а остальные полюсы — слева от пути интегрирования.

3. Вводятся функции $G_{s,j}(x)$, определяемые рядами

$$G_{s,j}(x)=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_s)}{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(\gamma_s-\gamma_\nu+1)}\times$$

$$\times F\begin{pmatrix}\alpha_1+\gamma_s\ldots\alpha_n+\gamma_s & x+\gamma_s\\ \gamma_s-\gamma_1+1\ldots*\ldots\gamma_s-\gamma_n+1 & \alpha_j+\gamma_s\end{pmatrix},$$

сходящимися в полуплоскости $\operatorname{Re}x<\operatorname{Re}(\alpha_j+\beta_n)$.

С помощью $G_{s,j}$ решения могут быть представлены в виде

$$y_s(z)=\frac{z^{-\alpha}}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{x-\alpha_j}\times$$

$$\times\Gamma(\alpha_j-x)\Gamma(\gamma_s+x)G_{s,j}(x)\,dx.$$

Если $|(1-z)/z|<1$ и $|\arg[(1-z)/z]|<\pi$, то этот интеграл равен умноженной на $-2\pi i$ сумме вычетов относительно полюсов, лежащих справа от пути интегрирования. Вычисляя эту сумму, мы получим для голоморфной при $z=1$ части $\varphi_s(z)$ функции $y_s(z)$ разложение

$$\varphi_s(z)=\frac{\Gamma(\alpha_j+\gamma_s)z^{-\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_j+\gamma_s)_\nu}{\nu!}a_\nu^{(j)}\left(\frac{z-1}{z}\right)^\nu, \qquad (5)$$

где $a_\nu^{(j)}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{c_{r,n}^{(j)}}{(\alpha_j+\beta_n+\gamma_s)_r}\frac{1}{r+\beta_n-\nu}$.

Разложение (5) имеет место в полуплоскости $\operatorname{Re}z>1/2$ при условиях $\operatorname{Re}(\alpha_i+\gamma_s)>0$, $i=1,2,\ldots,n$, $i\neq j$, $\operatorname{Re}(\alpha_j+\beta_r+\gamma_s)>0$.

4. В заключение рассматриваются голоморфные при $z=1$ решения y_{sr}, для которых получаются следующие выражения:

$$y_{sr}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{z^t\Gamma(\gamma_r-t)\Gamma(\gamma_s-t)\prod\limits_{\nu=1}^{n}\Gamma(t+\alpha_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq r,s}}^{n}\Gamma(t-\gamma_\nu+1)}\,dt.$$

Ю. Л. Рабинович

7983. Производящая функция для произведения двух полиномов Лежандра. Максимон (A generating function for the product of two Legendre polynomials. Maximon Leonard C.), Kgl. norske vid. selskabs forhandl. 1956 (1957), 29, № 18, pp. 82—86) (англ.)

Доказано соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta)z^n=[1-2z\cos(\alpha+\beta)+z^2]^{-1/2}\times$$

$$\times F(1/2,1/2;1;\ 4z\sin\alpha\sin\beta/[1-2z\cos(\alpha+\beta)+z^2]),$$

$$|z|\leqslant 1,\ z\neq e^{\pm i\alpha\pm i\beta}.$$

Используя некоторое нелинейное преобразование гипергеометрической функции, отсюда получается

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)P_n(y)=[(1-x)(1+y)]^{-1/2}\times$$

$$\times F(1/2,1/2;1;(1-y)(1+x)/(1+y)(1-x)),\qquad x<y.$$

Примечание референта. Функция $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)P_n(y)z^n$ была выражена через эллиптический интеграл уже Уотсоном (Watson G. N., J. London Math. Soc., 1933, 8, 189—192, 194—199, 289—292), чего автор, по-видимому, не заметил.

Г. К. Энгелис

7984. Соотношения между функциями Бесселя и микрофонными функциями. Яковлев А. И., Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 7, 319—324

Исследование микрофонных и других цепей приводит к линейному уравнению для силы тока i_{np}, интегрируя которое получаем

$$i_{np}=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t+\frac{r}{\omega L}\sin\omega t}\int e^{\frac{R}{L}t-\frac{r}{\omega L}\sin\omega t}\,dt.$$

Желая представить это решение в виде тригонометрического ряда

$$i_{np}=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}(I_{ns}\sin n\omega t+I_{nc}\cos n\omega t),$$

автор выражает коэффициенты I_0, I_{1s} через функции Бесселя

$$I_0=\frac{E}{R}\left\{J_0^2(z)+2R^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n^2(z)}{Z_n^2}\right\},$$

$$Z_n^2=R^2+(n\omega L)^2,\quad z=\frac{ir}{\omega L},$$

$$I_{1s}=\frac{2E}{R}\cdot\frac{\omega L}{r}R^2r\omega L\sum_{n=1}^{\infty}(-i)J_n(z)J_{n-1}(z)\frac{2n-1}{Z_n^2Z_{n-1}^2}.$$

Пользуясь тем, что в своих предыдущих работах он выразил эти же коэффициенты через так называемые микрофонные функции $M_0(r)$, $M_1(r)$

$$I_0=\frac{E}{R}M_0(r),$$

$$M_0(r)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{r^{2n}}{(Z_1Z_2\ldots Z_n)^2},$$

$$I_{1s} = 2\frac{E}{R}\cdot\frac{\omega L}{r}M_1(r),$$

$$M_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{r^{2n}}{(Z_1Z_2\ldots Z_n)^2},$$

он находит формулы, выражающие эти микрофонные функции через функции Бесселя. Я. Л. Геронимус

7985. О нулях интегралов Френеля. Крейсиг (On the zeros of the Fresnel integrals. Kreyszig Erwin), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 118—131 (англ.)

Изучается поведение в первой четверти комплексной плоскости функций $C(z)=\int_0^z t^{-1/2}\cos t\,dt$, $S(z)=\int_0^z t^{-1/2}\sin t\,dt$ $(z=x+iy)$, к которым легко приводятся обычные интегралы Френеля. Доказывается, что $C(z)$ не имеет нулей в полосах $0<x\leqslant\pi$, $(4n-1)\pi/2\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$, $n=1, 2, \ldots$; находятся приближенные значения нулей

$$z_{0,n}=(4n-1)\pi/2-\ln(\pi\sqrt{4n-1})/[(4n-1)\pi]+$$

$$+i\ln(\pi\sqrt{4n-1})$$

(ошибка не больше 2%) и выводится рекуррентная формула

$$z_{\rho+1,n}=z_{\rho,n}+c_\rho(2z_{\rho,n})^{-\rho},\text{ где } c_{2q+1}=(-1)^q(4q+1)!!,$$

$$c_{2q}=(-1)^{q-1}(4q-1)!!i,\ \lim z_{\rho,n}=z_n,\ C(z_n)=0.$$

Приводится таблица первых z_n от $z_n=4{,}62+1{,}68i$ до $z_{50}=312{,}58+3{,}79i$. Аналогично рассматривается $S(z)$. Нули обеих функций расположены (асимптотически) на кривой $y=\frac{1}{2}\ln 2\pi x$ и перемежаются.

Приведено несколько соотношений (степенной ряд, асимптотический ряд, связь с неполной Г-функцией), пригодных для вычисления значений $C(z)$ и $S(z)$ (см. также РЖМат, 1953, 918). Библ. 22 назв.

Г. К. Энгелис

7986 К. Специальные функций математической физики и химии. Снеддон (Special functions of mathematical physics and chemistry. Sneddon Ian Naismith. Edinburgh—London, Oliver and Boyd, 1956, viii, 164 pp., ill., 10 sh. 6 d.) (англ.)

Краткое введение в теорию специальных функций, рассчитанное на читателя с математической подготовкой, не предполагающей знания теории функций комплексного переменного.

Первая глава содержит некоторые сведения из теории линейных дифференциальных уравнений, краткое описание функции гамма и некоторых родственных ей специальных функций (интегральной показательной функции, интегрального синуса и косинуса, функции ошибок и т. д.).

Вторая глава посвящена изложению основ теории гипергеометрических функций, включая вырожденную гипергеометрическую функцию и обобщенные гипергеометрические функции.

В третьей и четвертой главах рассматриваются важнейшие свойства сферических и цилиндрических функций.

В последней главе дан краткий обзор теории ортогональных полиномов Эрмита и Лагерра.

Книга включает большое число примеров и упражнений, содержащих добавочные сведения по теории рассматриваемых функций и их применению к задачам математической физики и квантовой механики. В приложении дано описание свойств дельта-функции Дирака, широко используемой в исследованиях по теоретической физике.

Книга представляет интерес для студентов и аспирантов, изучающих квантовую механику и другие разделы теоретической физики. Н. Н. Лебедев

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7987. Соотношения интегральных преобразований линейных систем. Макдоналд, Брахман (Linear-system integral transform relations. Macdonald J. Ross, Brachman Malcolm K.), Revs Mod. Phys., 1956, 28, № 4, 393—422 (англ.)

Обзор известных соотношений между функциями, характеризующими линейные системы, дополненный оригинальными результатами авторов статьи.

Рассматриваются следующие функции: переходные функции систем $A(t)$ и $B(t)$, выражающие процесс при воздействии единичной функции, соответственно единичного импульса, и преобразования Лапласа этих функций $Q(p)$, соответственно $S(p)$; функции, определенные равенствами $S(i\omega)=P(\omega)+iT(\omega)$, $Q(i\omega)=J(\omega)-iH(\omega)$ при $p=\sigma+i\omega$ и $\sigma\to 0$.

Примерами рассмотренных соотношений между этими функциями являются равенства

$$P(\omega)=\omega H(\omega)+\lim_{\sigma\to 0}\{\sigma\,\mathrm{Re}\,[Q(\sigma+i\omega)]\},$$

$$F(x)=\omega^{-1}T(\omega)+\pi\delta(\omega)P(\omega),$$

$$P(\omega)=\lim_{\sigma\to 0}\int_0^\infty B(t)e^{-\sigma t}\cos\omega t\,dt\equiv\mathscr{F}_c[B(t)]$$

($\mathscr{F}_c$ — обозначает обобщенное преобразование Фурье по косинусу),

$$B(t)=F(\infty)\delta'(t)+(2\pi)\mathscr{F}_c[P(\omega)],$$

$$P(\omega)=P(\infty)-(2\pi)\mathscr{F}_c\mathscr{F}_s[T(y)]=$$

$$=P(\infty)-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{yT(y)\,dy}{y^2-\omega^2}$$

($\mathscr{F}_s$ — обобщенное преобразование Фурье по синусу, перечеркнутый знак интеграла означает главное значение интеграла).

Далее рассматривается $\mathscr{S}(\tau)$ — так называемая функция распределения времен релаксации, связанная с функцией $Q(p)$ равенством

$$Q(p)=\int_0^\infty\frac{\mathscr{S}(\tau)\,d\tau}{1+p\tau},$$

где выражение $(1+p\tau)^{-1}$ имеет смысл функции $Q(p)$ для простейшего случая. Изучаются соотношения между функциями $\mathscr{S}(\tau)$, $D(\lambda)=\lambda^{-1}\mathscr{S}(\lambda^{-1})$ и некото-

рыми из вышеуказанных функций. Примеры таких соотношений:

$$A(t) = L[D(\lambda)] = \int_0^\infty \mathscr{F}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-t\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$D(\lambda) = \frac{i}{2\pi}[Q(\lambda e^{i\pi}) - Q(\lambda e^{-\lambda\pi})],$$

$$\omega Q(i\omega) = L_{(1/\omega)}\mathscr{F}_e[\mathscr{F}(\tau)]$$

($L_{(1/\omega)}$ обозначает преобразование Лапласа с параметром преобразования $1/\omega$, а $\mathscr{F}_e$ — показательное преобразование Фурье).

Рассматриваются примеры вышеуказанных соотношений, имеющие отношение к электрическим цепям как с сосредоточенными, так и с непрерывно распределенными параметрами, в частности, пример последовательного включения сопротивления R и емкости C. Приводится таблица, содержащая 21 пример таких соотношений. В введении к статье указывается, что эти соотношения имеют значение также для квантовой механики, квантовой теории поля, теории диэлектриков, магнитного резонанса и др.

Приложения к статье содержат:

1) Сводку определений и некоторых свойств интегральных преобразований (преобразования Лапласа, обобщенных преобразований Фурье по косинусу и синусу, показательного преобразования Фурье, преобразований Гильберта, Стилтьеса, Меллина и Кронига—Крамера. Под последним из них подразумевается преобразование

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{yf(y)\,dy}{x^2 - y^2}.$$

2) Сводку свойств импульсной δ-функции и ее производных, частично выраженных интегральными преобразованиями; имеется ссылка на теорию обобщенных функций, причем автор указывает работу Гюттингера (РЖМат, 1957, 3307).

3) Сводку соотношений между преобразованиями Меллина функций, характеризующих линейные системы. Имеется более ста ссылок на литературу.

Н. А. Бразма

7988. Формула обращения преобразований типа свертки. Танно (An inversion formula for convolution transforms. Tanno Yukichi), Kodai Math. Semin Repts, 1956, 8, № 2, 79—84 (англ.)

Рассматривается обращение интегрального преобразования вида

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\varphi(t)\,dt, \qquad (1)$$

где ядро имеет выражение

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{F(s)} e^{st}\,ds \qquad (2)$$

при

$$F(s) = \frac{e^{bs}\prod_{k=1}^{\infty}(1 - s/a_k)e^{s/a_k}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - s/c_k)e^{s/c_k}},$$

а b, a_k и c_k ($k = 1, 2, \ldots$) являются действительными постоянными, удовлетворяющими условиям

$$a_k c_k > 0, \quad |a_k| \leqslant |c_k|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-2} < \infty.$$

В работе последовательность $\{a_k/c_k\}$ называется допустимой по отношению к ядру $G(t)$, если

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\left|\frac{1}{F(\sigma + i\tau)}(\sigma + i\tau)\right| = 0$$

равномерно относительно σ в некотором конечном промежутке и если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{F(\sigma + i\tau)}(\sigma + i\tau)\right| d\tau$$

сходится при любом значении σ, удовлетворяющем условию $E_1(\sigma) \neq 0$, где $E_1(\sigma) = e^{b\sigma}\prod_{k=1}^{\infty}(1 - \sigma/a_k)e^{\sigma/a_k}$.

Далее рассматриваются операторы

$$F_m(D) = \frac{e^{bD}\prod_{k=1}^{m}(1 - D\,a_k)e^{D/a_k}}{\prod_{k=1}^{m}(1 - D/c_k)e^{D/c_k}} \qquad (3)$$

и

$$F(D) = \lim_{m\to\infty} F_m(D), \qquad (4)$$

где D обозначает оператор дифференцирования.

Доказывается теорема обращения. Если $G(t)$ определено равенством (2), последовательность $\{a_k/c_k\}$ допустима по отношению к $G(t)$, $\varphi(x)$ ограничена и непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$, $F_m(D)$ и $F(D)$ определены равенствами (3) и (4) и имеет место преобразование (1), то

$$F(D)f(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(D)f(x) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Работа содержит обобщения известных результатов Хершмана и Уиддера (см., например, Hirschman I. I., Widder D. V., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, 135—201; **67**, 69—97). Н. А. Бразма

7989. О произведении типа свертки в теории двойного преобразования Лапласа. Пистойа (Sul prodotto di composizione, nella teoria della trasformata doppia di Laplace. Pistoia Angelo), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere, Cl. sci. mat. e natur., 1954, 87, № 3, 627—652 (итал.)

Рассматриваются два типа сверток функций.

1) Функция $F(x, y)$ называется принадлежащей классу Γ, если она аннулируется при $x < 0$ и при $y < 0$ и интегрируема в любой ограниченной области плоскости (x, y).

Поверхностная свертка функций $F(x, y)$ и $G(x, y)$, принадлежащих классу Γ, определяется равенством

$$F * G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int F(u, v)\,G(x - u, y - v)\,du\,dv.$$

Функция $F(x, y)$ класса Γ называется интегрируемой порядка $\alpha > -1$ (в квадранте $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$), если выполняются следующие два условия:

а) существует конечный предел

$$\lim_{(x,y)\to\infty}[F * (xy)^\alpha]/(xy)^\alpha = I_\alpha(F) \quad (\alpha > -1);$$

б) существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$F * (xy)^\alpha\,|/(xy)^\alpha \leqslant M \quad (\alpha > -1)$$

почти всюду в квадранте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Доказываются несколько предложений, имеющих отношение к поверхностной свертке функций, среди которых основное значение имеет следующая теорема: Если функции

$$F(x, y) = e^{-(px+qy)} F_1(x, y)$$

$$G(x, y) = e^{-(px+qy)} F_2(x, y) \qquad (p = a + ib, \quad q = c + id)$$

интегрируемы порядка α, соответственно β, при $-1 < \alpha < 0$, $\beta = -(1 + \alpha)$, то существует равенство

$$L(F_1 * F_2) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy)} (F_1 * F_2)\, dxdy =$$

$$= L(F_1)\, L(F_2).$$

2) Функция $H(t)$ называется принадлежащей классу R, если она аннулируется при $t < 0$ и интегрируема в любом промежутке $0 < t < T$ при $0 < T < \infty$.

Вторая свертка функций $H(t)$ и $F(x, y)$, принадлежащих классу R, соответственно Г, по оси, образующей угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$ с осью x, определяется равенством

$$H_\alpha^* F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) F(x - \tau \cos\alpha,\ y - \tau \sin\alpha)\, d\tau.$$

Среди доказанных предложений, имеющих отношение к свертке функций по оси, основное значение имеет следующий результат. При условиях, аналогичных условиям вышеуказанной теоремы, существует равенство

$$L(H_\alpha^* F) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy)} (H_\alpha^* F)\, dxdy =$$

$$= L(F).\, h(p \cos\alpha + q \sin\alpha), \text{ где } h(p) = \int_0^\infty e^{-pt} H(t)\, dt.$$

Указываются обобщения понятия свертки на большее число измерений и свойства этих обобщений.

Оба рассмотренных основных свойства сверток функций имеются при других условиях в ранней работе Америо (Amerio L., Atti Accad. Italia. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur.,1941, 12, 707—780). Н. А. Бразма

7990. Новый метод обращения преобразования Лапласа. Папулис (A new method of inversion of the Laplace transform. Papoulis Athanasios), Quart. Appl. Math., 1957, **14**, № 4, 405—414 (англ.)

Рассматривается вопрос о выражении данной функции $r(t)$ через ее преобразование Лапласа

$$R(p) = \int_0^\infty e^{-pt} r(t)\, dt$$

в виде ряда $r(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k \varphi_k(t)$, где $\{\varphi_k(t)\}$ — некоторая данная система функций.

Для тех случаев, когда $\{\varphi_k(t)\}$ — тригонометрическая система, система полиномов Лежандра и система полиномов Лагерра, автор приводит рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов c_k через значения $R(p)$ в равноотстоящих точках $p_k = a + k\sigma$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ вещественной оси p. А. Ф. Тиман

7991. Обратное преобразование Лапласа, выраженное в рядах Неймана. Камби (Inverse Laplace transforms expressed as Neumann series. Cambi Enzo), J. Math. and Phys., 1956, **35**, № 1, 114—122 (англ.)

Рассматривается преобразование

$$\Lambda\{f\} = \operatorname{ch} u \int_0^\infty e^{-t \operatorname{sh} u} f(t)\, dt,$$

получающееся из обратного преобразования Лапласа заменой $p = \operatorname{sh} u$.

Принимая во внимание формулу $\Lambda(J_n) = e^{-nu}$, где $J_n(t)$ — функция Бесселя первого рода, предлагается следующий способ обращения оператора Λ: если

$$f(t) = \sum_0^\infty a_n J_n(t) \tag{1}$$

и почленное применение Λ возможно, то

$$\Lambda(f) = \sum_0^\infty a_n e^{-nu}. \tag{2}$$

Обратно, если Λ-преобразование от неизвестной функции $f(t)$ может быть представлено в виде (2), то функцию $f(t)$ получаем в виде ряда (1) с теми же коэффициентами.

Даются примеры приложения этого метода к разложению функций в ряды Неймана (1) и к дифференциальному уравнению переменного тока.

И. Г. Соколов

7992. Инверсия Мёбиуса для преобразований Фурье. Голдберг, Варга (Moebius inversion of Fourier transforms. Goldberg Richard R., Varga Richard S.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 4, 553—559 (англ.)

Доказана теорема: Если $\varphi(u)$ — функция с ограниченной вариацией на промежутке $0 \leqslant u \leqslant R$ для каждого $R > 0$,

$$\varphi(u) \ln u \in L(1, \infty) \text{ и } F(t) = \int_0^\infty \varphi(u) \cos tu\, du,$$

то функция

$$G(t) = \frac{1}{t}\left[\frac{F(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k F\left(\frac{k\pi}{t}\right)\right]$$

почти всюду ограничена при $0 < t < \infty$ и

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^\infty \mu_{2n-1} G[(2n-1)\, t]$$

почти всюду на интервале $0 < t < \infty$. Здесь μ_k — числа Мебиуса, определяемые равенствами

$$\sum \mu_{m/d} = \begin{cases} 1 & (m = 1), \\ 0 & (m = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

где суммирование ведется по всем делителям d числа m. Авторы указывают на возможность использования формул инверсии при численных расчетах.

Ю. И. Черский

7993. О преобразованиях Вебера. Гриффит (On Weber transforms. Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1956, **89**, № 4, 232—248 (англ.)

Изучается интегральное преобразование

$$F(s) = T[f(x)] \equiv \int_a^\infty xC_\nu(xs, as) f(x)\, dx$$

и ему обратное

$$f(x) = T^{-1}[F(s)] \equiv \int_0^\infty \frac{sC_\nu(xs, as)}{[Q_\nu(as)]^2} F(s)\, ds, \tag{1}$$

причем

$$C_\nu(\alpha, \beta) = J_\nu(\alpha)\, Y_\nu(\beta) - J_\nu(\beta)\, Y_\nu(\alpha),$$

$$[Q_\nu(\alpha)]^2 = [J_\nu(\alpha)]^2 + [Y_\nu(\alpha)]^2,$$

где J_ν и Y_ν — функции Бесселя первого и второго рода. В случае, когда $x^{1/2} f(x) \in L(a, \infty)$, а в окрестности точки x $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, формула (1) доказана Титчмаршем (Titchmarsh, Proc. London Math. Soc., 1924, **22**, № 2, 15—28). Автором рассмотрены другие случаи, когда а) $s^{1/2} F(s)/Q_\nu(as) \in L(0, \infty)$, б) $x^{1/2} f(x) \in L_2(a, \infty)$, в) $s^{1/2} F(s)/Q_\nu(as) \in L_2(0, \infty)$. Доказана, в частности, теорема, аналогичная известной теореме Планшереля. Установлена формула Парсеваля

$$\int_a^\infty x f_1(x)\, f_2(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{s F_1(s)\, F_2(s)}{[Q_\nu(as)]^2}\, ds.$$

Изучены также аналитические свойства преобразования Вебера финитных функций. Ю. И. Черский

7994. Заметка о преобразовании Гегенбауэра. Лакшмана-Рао, Бхатнагар (A note on the Gegenbauer transform. Lakshmana Rao S. K., Bhatnagar P. L.), J. Indian Inst. Sci., 1956, (A—B) 38, № 4, A249—A255 (англ.)

Рассматриваются система полиномов $C_n^\nu(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) y'' - (2\nu + 1) xy' + n(n + 2\nu) y = 0,$$

и преобразования

$$f_1^{(\nu)}(n) = T_1\{f(x)\} = \int_{-1}^{1} f(x)(1 - x^2)^{\nu - 1/2} C_n^\nu(x)\, dx, \qquad (1)$$

$$f_2^{(\nu)}(n) = T_2\{f(x)\} = \int_{-1}^{1} f(x)\, C_n^\nu(x)\, dx, \qquad (2)$$

функций $f(x)$, заданных на (—1, 1). Устанавливаются некоторые соотношения для преобразований (1) и (2). Так, например, если вторая производная интегрируема и ограничена на любом отрезке, целиком лежащем внутри (—1, 1), то из того, что

$$\lim_{|x| \to 1} (1 - x^2)^{\nu + 1/2} f(x) = 0$$

и

$$\lim_{|x| \to 1} (1 - x^2)^{\nu + 1/2} f'(x) = 0,$$

следует соотношение

$$T_1\left\{(1 - x^2)^{-(\nu - 1/2)} \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^{\nu + 1/2} f'(x)\right]\right\} =$$

$$= -n(n + 2\nu) f_1^{(\nu)}(n).$$

Если

$$\lim_{|x| \to 1} (1 - x^2) f(x) = 0$$

и

$$\lim_{|x| \to 1} (1 - x^2) f'(x) = 0,$$

то

$$T_2\left\{\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2) f'(x) + (2\nu - 1) x f(x)\right]\right\} =$$

$$= -n(n + 2\nu) f_2^{(\nu)}(n) + (2\nu - 1)\left[x f(x) C_n^\nu(x)\right]_{-1}^{1}$$

Указано приложение преобразования (1) к исследованию вибрации вращающейся нити переменной плотности. А. Ф. Тиман

7995. К теории обобщенных интегральных преобразований функций многих переменных. Аветисян А. Е., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1956, 9, № 5, 3—24 (рез. арм.)

Известные результаты М. М. Джрбашяна (РЖМат, 1956, 6534) переносятся на случай функций двух переменных. А. Ф. Тиман

7996. Символическое исчисление: приложение теоремы умножения. Балличчони (Calcul symbolique: une application du théorème du produit. Balliccioni A.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 7—10, 570—572 (франц.)

Известная в операционном исчислении «теорема умножения» применяется для получения следующих двух тождеств для биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{m} ((-1)^k (k + 1)) C_m^k = 1 \cdot (m + 1), \qquad (\text{F})$$

$$\sum_{k=0}^{m} ((-1)^k (k + 1)^2) C_m^k = (1 \cdot (m + 1)) \sum_{k=0}^{m} 1 \cdot (k + 1) \qquad (\text{F}')$$

Примечание референта. Тождества (F) и (F′) могут быть получены из формулы

$$(1 - x)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k x^k. \qquad (1)$$

Например, проинтегрировав (1) на отрезке $(0, x)$ и подставив затем $x = 1$, получим (F). М. Б. Балк

7997 К. Введение в операционное исчисление. Пародди (Introduction à l'étude de l'analyse symbolique. Parodi Maurice. Paris, Gauthier-Villars, 1957, 246 p., ill.) (франц.)

Книга содержит систематическое и, несмотря на сравнительно небольшой объем, весьма полное изложение операционного исчисления (о. и.) на основе преобразования Лапласа. Учтены результаты последних лет и разобраны основные приложения о. и. в математическом анализе, теории специальных функций и физике. Книга состоит из следующих глав: I. Основы о. и. II. Приложение о. и. к интегрированию дифференциальных уравнений. III. Два приложения о. и. в физике. IV. Уравнения с частными производными и о. и. V. Приложения о. и. к вычислению определенных интегралов и к изучению некоторых функций. VI. Интегральные уравнения и о. и. VIII. Очерк теории электрических цепей: метод Карсона и преобразование Лапласа. Два добавления посвящены вычислению интеграла Пауссона

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{0u^2}{4} - \frac{s^2}{u^2}\right) du \quad \text{и} \quad I(n, a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^n dx.$$

В гл. I излагаются основные теоремы и формулы о. и. Следует отметить введение дифференцирования и интегрирования нецелого порядка на основе о. и. (стр. 22), приложения известной формулы

$$f(t^2) \supset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2 x^2/4} \varphi(1/x^2)\, \frac{dx}{x^2},$$

где $f(t) \supset \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$,

к изучению преобразований Лапласа начальных функций, связанных с бесселевыми функциями (стр. 31 и 37) и к выводу формулы удвоения из теории гамма-функции (гл. V, стр. 172), а также суммирование рядов Фурье методами о. и., приводящими после почленного интегрирования к рядам Миттаг—Леффлера, которые в некоторых случаях являются известными разложениями элементарных функций (стр. 73). (Этот метод автором приписывается Пайпсу (Pipes L. A., J. Appl. Phys., 1950, **21**, 298), хотя он известен из более ранней литературы). Глава заканчивается перечнем основных формул о. и.

Гл. II открывается операционными методами интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Далее следуют теоремы разложения Хевисайда, интеграл Дюамеля (называемый автором соотношением Карсона-Васки) и ряд электротехнических приложений. Конец главы посвящен рассмотрению обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраическими, в частности, полиномиальными коэффициентами, причем устанавливается связь метода о. и. с аналитической теорией дифференциальных уравнений в комплексной области. Представляет интерес рассмотрение (стр. 107—112) операционными методами уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)\,y = B(t), \text{ где } A(t) = a^2 + b(t) \text{ и } |b(t)| < a^2,$$

и его приложение к изучению R, L, C-контура с медленно меняющимися во времени параметрами R, L и C.

Гл. III содержит приложения о. и. к вопросам устойчивости (вывод критерия Найквиста) и к изучению интенсивности излучения по разным направлениям линейно распределенных осцилляторов.

В гл. IV рассматриваются приложение о. и. к интегрированию уравнений математической физики. В конце главы рассмотрена задача о продольных колебаниях короткого жесткого стержня, один конец которого заделан, а другой подвержен воздействию вдоль оси переменной силы $f(t)$ (задача Шарбонье). Решение получается в виде ряда

$$u(x, t) = \frac{1}{E\Omega}\left\{xf(t) - \frac{x}{V^2}\left(\frac{x^2}{3!} - \frac{l^2}{2!}\right)f''(t) + \right.$$

$$\left. \frac{x}{V^4}\left(\frac{x^4}{5!} - \frac{l^2x^2}{2!3!} + \frac{l^4}{4!}\right)f^{IV}(t) - \ldots\right\},$$

где коэффициент при $f''(t)$ равен

$$\frac{1}{V^2}\int_0^x dx_1 \int_l^{x_1} y\,dy,$$

при $f^{IV}(t)$

$$\frac{1}{V^4}\int_0^x dx_3 \int_l^{x_3} dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 \int_{-l}^{x_1} y\,dy$$

и т. д. (E — модуль упругости, Ω — площадь сечения стержня, V — скорость распространения упругих волн).

В гл. V приведены известные приложения о. и. к вычислению определенных интегралов и к асимптотическим разложениям функций, имеющих простые интегральные представления (неполной гамма-функции и т. п.). Показывается, что интегралы Фруллани также могут быть вычислены методами о. и.

В гл. VI простая формула операционного решения интегрального уравнения типа Вольтерра применяется к решению некоторых задач, а затем обобщается на более сложные типы уравнений, в частности, некоторые интегро-дифференциальные уравнения. В качестве примера решается задача о движении сферы в жидкости, приводящая к уравнению

$$V''(t) + PV'(t) + Q\int_0^t \frac{V'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = R,$$

где P, Q и R — константы (стр. 199—202). Конец главы посвящен операционным методам решения уравнений Фредгольма, причем рассматриваются лишь отдельные примеры, из которых отметим уравнение

$$\int_0^\infty x^k f(t + bx^m)\,dx = g(t)$$

(стр. 209). Автор ссылается на более общее рассмотрение вопроса в своем труде «Equations intégrales et transformation de Laplace» (Publ. Ministère de l'Air, 1950, Fasc. 242).

Гл. VII содержит обзор теории электрических цепей с сосредоточенными и с распределенными постоянными. В. И. Левин

7998 Д. **О кратно монотонных функциях и их преобразованиях Лапласа. Вильямсон** (On multiply monotone functions and their Laplace transforms. Williamson Richard Edmund.—Doct. diss. Univ. Pennsylvania, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2232 (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

7999. **Активная полоса частотного спектра функции времени. Агеев Д. В.,** Тр. Горьковск. политехн. ин-та, 1955, **11**, вып. 1, 5—10

В радиофизике существенным является понятие полосы частот участка спектра временной функции, необходимого для восстановления функции с определенной степенью точности. Если ввести понятие текущего спектра функции $f(t)$, равной нулю при $t < t_0$, с помощью равенств ($t' < t$)

$$f(t') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(\omega, t)\cos\omega t' + B(\omega, t)\sin\omega t']\,d\omega,$$

$$A(\omega, t) = \int_{t_0}^{t} f(\xi)\cos\omega\xi\,d\xi, \quad B(\omega, t) = \int_{t_0}^{t} f(\xi)\sin\omega\xi\,d\xi,$$

$$S(\omega, t) = \sqrt{A^2(\omega, t) + B^2(\omega, t)},$$

то аналогично можно поставить вопрос о введении понятия полосы частот, уже зависящей от времени t, необходимой для восстановления с определенной точностью функции $f(t)$ на интервале $(0, t)$ или в некоторой точке этого интервала.

Вводится понятие активной полосы частот двумя неэквивалентными способами:

1. Активной полосой частотного спектра функции $f(t')$ в момент t называется минимальная по ширине полоса частот $\omega_1(t) \leqslant \omega \leqslant \omega_2(t)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\omega_1(t)}^{\omega_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} S^2(\omega, t)\,d\omega \geqslant \gamma_1 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} S^2(\omega, t)\,d\omega,$$

где γ_1 — наперед заданное число, немного меньшее единицы;

2. Активной полосой частотного спектра функции $f(t')$ в момент t называется минимальная по ширине полоса частот $\omega_1(t) \leqslant \omega \leqslant \omega_2(t)$, при которой функция

$$f_\Delta(t-\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1(t)}^{\omega_2(t)} [A(\omega, t)\cos\omega(t-\tau) +$$

$$+ B(\omega, t)\sin\omega(t-\tau)]\, d\omega$$

с заданной степенью точности, в заранее указанном смысле, близка к функции $f(t-\tau)$.

Автор считает, что второе определение лучше, поскольку обеспечивает получение функции $f_\Delta(t-\tau)$, близкой к $f(t-\tau)$ по норме, соответствующей решаемой задаче.

Рассмотрен подробно пример $f(t) = u\sin at^2$. 2.

Я. И. Хургин

8000 К. Избранные труды. Том II. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. Д и н н и к А. Н. Киев, Изд-во АН УССР, 1955, 223 стр., 14 р. 65 к.

Том II избранных трудов АН УССР заключает в себе известную монографию А. Д. Динника, которая была издана в двух отдельных частях — в 1913 г. «Статика» (Донским политехническим институтом) и в 1915 г. «Теория вибраций» (Екатеринославским горным институтом). В настоящем издании лишь изменены обозначения и исправлены опечатки.

В. В. Немыцкий

См. также: 7794, 7815, 7901, 7904, 708, 7909 К, 8049, 8111, 8277

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

8001. Продолжение линейных непрерывных отображений в паранормированных модулях. Г и к а (Prelungirea aplicaţiilor liniare şi continue în module paranormate. G h i k a A l.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1955, 5, № 3, 503—507 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор утверждает, что с помощью введенного им понятия паранормы (РЖМат, 1956, 5324) ему удалось обобщить теорему Нахбина о продолжении линейных отображений действительных нормированных векторных пространств (Nachbin L., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, № 1, 28—46) на случай S-нормированных n-полиэдральных A-модулей относительно корпоидальных алгебр A с мультипликативной группой образующих S (РЖМат, 1956, 5324), в частности, на случай нормированных векторных пространств относительно тела комплексных чисел и тела кватернионов.

Именно, оказывается, что необходимым и достаточным условием для непрерывности линейного отображения T некоторого S-нормированного A-модуля E с паранормой p в S-нормированный A-модуль E' с паранормой p' является существование такого положительного числа μ, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $p'(T(x)) \leqslant \mu p(x)$. Определенная в силу этого на множестве таких непрерывных отображений T функция $p'(T) = \sup p'(T(x))$ оказывается S-нормой в пространстве линейных непрерывных отображений модуля E в E'. Это позволяет распространить метод Нахбина на рассматриваемый случай и доказать теорему: Пусть имеем линейное непрерывное отображение T подмодуля E_1 некоторого S-нормированного A-модуля E с паранормой p в S-нормированный A-модуль E' с паранормой p', замкнутые шары которого обладают свойством бинарного пересечения в смысле Нахбина, т. е. любое множество попарно пересекающихся замкнутых шаров из E' имеет непустое пересечение. Тогда существует такое линейное непрерывное отображение U модуля E в E', что $p'(U) = p'(T)$ и что при любом $x \in E_1$ будет $U(x) = T(x)$. Вопрос о необходимости приведенного условия остается (в отличие от теоремы Нахбина) открытым.

Приводится также формулировка теоремы (обобщающей другую теорему Нахбина) об изоморфном представлении A-модулей с полиэдральной паранормой в A как модулей непрерывных функций со значениями в алгебре A, определенных на вполне разрывном пространстве (т. е. таком, в котором каждое открытое множество замкнуто). Доказательства не приводятся.

М. Ф. Бокштейн

8002. О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах. Э н г е л ь с о н Я. Л., Zinâtniskie raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-т, 1956, 8, № 2, 73—80 (рез. лат.)

Пусть E — вещественное, рефлексивное, локально выпуклое, линейное, топологическое пространство с первой аксиомой отделимости и E^* — пространство, сопряженное к E. Предполагается, что $E \subset H \subset E^*$, где H — некоторое гильбертово пространство, всюду плотное в E^*, причем внутреннее произведение $(x, y) = y(x)$, $x \in E$, $y \in E^*$, совпадает со скалярным произведением в H, если $y \in H$. Изучается линейный самосопряженный в H оператор A, действующий вполне непрерывно из E^* в E. Доказываются следующие леммы:

1. $(Au, v) = (u, Av)$ для всяких $u, v \in E^*$.

2. $\operatorname{grad}(Au, u) = 2Au$, где $u \in E^*$, причем функционал $I(u) = (Au, u)$ слабо непрерывен на всяком выпуклом ограниченном множестве из E^*.

В дальнейших предложениях предполагается дополнительно, что A — квазиположительный оператор в H.

3. Для всякого $u \in E^*$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} I_n(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}(\varphi_k, u)^2;\quad I_n(u) = (A_n u, u) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1}(\varphi_k, u)^2,$$

где λ_k и φ_k — характеристические числа и соответствующие им собственные векторы оператора A, рассматриваемого в H.

4. Пусть на слабо компактном и слабо замкнутом множестве D локально выпуклого пространства задана монотонная последовательность слабо непрерывных функционалов $\{f_n(x)\}$, сходящаяся в каждой точке $x \in D$ к слабо непрерывному функционалу $f(x)$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно в D (обобщенная теорема Дини).

5. Для всякого выпуклого ограниченного слабо замкнутого множества $D \subset E^*$ $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{x\in D} |I(u) - I_n(u)| = 0$.

Отсюда следует, что $A_n \to A$ в смысле сильной топо-

логии пространства линейных операторов $L(E^*, E)$.

6. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-1} (\varphi_k, u)\, e_k \varphi_k, \quad e_k = \operatorname{sgn} \lambda_k \qquad (1)$$

есть спектральное представление главного квадратного корня $A^{1/2}$ из A, рассматриваемого в H (для $u \in H$). Тогда ряд (1) сходится в пространстве E сильно к оператору $A^{1/2}$, действующему из H в E.

При помощи сформулированных и других предложений устанавливается основная теорема работы: Определенный в H формулой (1) главный квадратный корень $A^{1/2}$ из оператора A действует вполне непрерывно из E^* в H (для $u \in E^*$) и из H в E (для $u \in H$).

Все предложения представляют собой обобщение соответствующих предложений, установленных для операторов A, действующих из L^q в L^p ($p > 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), референтом (РЖМат, 1956, 1479; см. также РЖМат, 1957, 5737К). План доказательства тот же.

Примечание референта. Приведенное доказательство леммы 1 фактически использует первую аксиому счетности, но автор сообщил референту простое доказательство леммы 1, которое не использует первой аксиомы счетности. М. М. Вайнберг

8003. Строгая выпуклость и гладкость нормированных пространств. Дей (Strict convexity and smoothness of normed spaces. Day Mahlon M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 516—528 (англ.)

Линейное нормированное пространство B называется строго выпуклым (SC-пространством), если середина отрезка, концы которого лежат на единичной сфере, всегда лежит внутри единичной сферы. Если через каждую точку поверхности единичной сферы проходит единственная опорная (касательная) гиперплоскость, то пространство B называется гладким (SM-пространством). Далее, B называется SCM-пространством, если оно является одновременно SC- и SM-пространством.

Если пространство B изоморфно некоторому SC-, SM- или SCM-пространству, то оно называется, соответственно, sc-, sm- или scm-пространством.

Теорема 1. Пространство, изоморфное подпространству некоторого sc- или sm-пространства, само является sc- или, соответственно, sm-пространством.

Теорема 2. Если существует линейное взаимно однозначное отображение sm-пространства B на scm-пространство B', то B является scm-пространством.

Теорема 4. Всякое сепарабельное пространство является scm-пространством.

Эта теорема усиливает некоторые результаты Кларксона и Кли (Clarkson J. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 40, 396—414; РЖМат, 1953, 1251).

Пусть I — некоторое множество индексов, F — линейное пространство вещественных функций $\varphi(i)$ ($i \in I$), нормированное так, что из $0 \leqslant \varphi_1(i) \leqslant \varphi_2(i)$ при всех i следует: $0 \leqslant \|\varphi_1\|_F \leqslant \|\varphi_2\|_F$. Пусть далее B_i ($i \in I$) — система нормированных пространств, а B — линейное нормированное пространство функций $x(i)$ ($i \in I$), значения которых для каждого элемента $i \in I$ принадлежат соответствующему пространству B_i: $x(i) \in B_i$. Предположим, что для каждой функции $x(i) \in B$ вещественная функция $x'(i) = \|x(i)\|_{B_i}$ принадлежит F и что $\|x\|_B = \|x'\|_F$.

Теорема 6. Если F и все B_i строго выпуклы, то B также строго выпукло.

Теорема 7. Пусть F и B построены, как указано выше; F^* и B^* — сопряженные пространства, причем для $x \in B$ и $f \in B^*$: $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x_i)$ ($x_i = x(i) \in B_i$; $f_i \in B_i^*$) и аналогично задается $f'(x')$ для $x' \in F$, $f' \in F^*$. Если F и все B_i гладки, то B также гладко.

Как следствие последних теорем отмечается, что пространство $l_p(I)$ функций $x = x(i)$ с нормой $\|x\| = \left[\sum \|x(i)\|_{B_i}^p\right]^{1/p} < \infty$ ($p \geqslant 1$) есть sc-пространство, если таковыми являются все B_i; если все B_i суть sm-пространства, а I — счетное множество или $p > 1$, то $l_p(I)$ — также sm-пространство. Далее, пространство $m(I)$ ограниченных функций при счетном I также является sc-пространством одновременно со всеми B_i. Если B есть sc-пространство, то пространство функций, непрерывно отображающих топологическое произведение I сегментов $[-1, 1]$ в B, также является sc-пространством.

В частном случае, когда B_i — действительные оси, т. е. $x = x(i)$ — функции с вещественными значениями, отмечается, что при несчетном I пространство $l_1(I)$ не является sm-пространством, а при бесконечном I пространство $m(I)$ и его подпространство $m_0(I)$, состоящее из функций $x(i)$, равных нулю всюду, кроме счетного множества значений i, не являются sm-пространствами (теорема 9); подпространство $c_0(I)$ таких функций $x(i)$, что при всяком $\varepsilon > 0$ множество значений i, на которых $|x(i)| > \varepsilon$, конечно, является sm- и sc- пространством (теорема 10).

В заключение (теоремы 13 и 14) приводятся примеры пространств непрерывных функций, в которых не действуют теоремы типа Какутани и Майкла об одновременном продолжении функции с помощью линейного преобразования. М. А. Рутман

8004. О парах дополнительных линейных многообразий в пространстве Банаха. Дель-Паскуа (Sulle coppie di varietà lineari supplementari di uno spazio di Banach. Del Pasqua Dario), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 129—139 (итал.)

Дополнительными называются линейные многообразия, прямая сумма которых дает данное пространство. Устанавливаются некоторые свойства дополнительных многообразий, в большинстве известные. Работа является продолжением предыдущей статьи автора (РЖМат, 1957, 611). Г. П. Акилов

8005. Нормированно-производные числа векторных функций. Пи-Кальеха (Los numeros derivonormados de funciones vectoriales. Pi Calleja Pedro), Rev. Union mat. argent. y Asoc. fis. argent., 1955, 17, 161—172 (исп.)

Доказывается теорема: Пусть $f(x)$ — векторная функция, определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$ и принимающая значения в нормированном пространстве E над полем действительных чисел, и пусть $g(x)$ — числовая, непрерывная и возрастающая на этом отрезке функция. Положим:

$$N_+ f(x) = \varlimsup_{y \to x+} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{|y}\,,$$

$$D_+ f(x) = \varlimsup_{y \to x+} \frac{g(y) - g(x)}{y - x}\,.$$

Если всюду в промежутке $[a, b)$, за исключением счетного множества точек, выполняется неравенство $N_+ f(x) \leqslant D_+ g(x)$, причем обе части неравенства одновременно не бесконечны, то $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$. Если, кроме того, по крайней мере, в одной точке промежутка $[a, b)$ имеем $N_+ f(x) < D_+ g(x)$, то $\|f(b) - f(a)\| < g(b) - g(a)$.

Как следствие этой теоремы получаются достаточные условия постоянства функции $f(x)$ в $[a, b]$.

Эти результаты распространяются также на случай векторной функции $f(z)$ комплексного переменного z.

Э. Апарисио

8006. **О логарифме равномерно ограниченного оператора.** К р а б б е (On the logarithm of a uniformly bounded operator. K r a b b e G. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 1, 155—166 (англ.)

Пусть U — «равномерно ограниченный» оператор в рефлексивном банаховом пространстве, т. е. такой оператор, что $\| U^n \| \leqslant K$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Основная теорема статьи утверждает, что если числа ± 1 не являются собственными значениями оператора U, то может существовать не более чем один такой ограниченный оператор A, что $e^{iA} = U$, $\sigma(A) \subset [-\pi, \pi]$, где $\sigma(A)$ — спектр оператора A.

Если U — любой унитарный оператор в гильбертовом пространстве, то хорошо известно, что такой оператор A существует.

B. Sz.-Nagy

8007. **Симметризуемые операторы в банаховом пространстве.** В а н В э н ь - с я н ь (Banach 空間上一種可對稱化算子. 王文嫻), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 291—300 (кит.)

Принимая определение Аткинсона о симметризуемом линейном операторе (Atkinson F. V., Monatsh. Math., 1949, 53, 278—297), автор доказывает теоремы, установленные Лаксом при помощи введенного в банаховом пространстве скалярного произведения (РЖМат, 1955, 5933). Доказывается также теорема о спектральном разложении симметризуемых линейных операторов, обладающих стандартным дискретным спектром.

Ши Чжун-цы, Цзэн Кэнь-чэнь

8008. **О перманентности некоторых свойств преобразования, зависящего от параметра. Критерий полной обратимости преобразования.** Д а р б о (Sulla permanenza di certe proprietà in una trasformazione dipendente da un parametro. Un criterio di invertibilita'completa. D a r b o G a b r i e l e), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 357—370 (итал.)

Пусть $\sum$ — банахово пространство и Φ — преобразование некоторого множества Ξ на часть $\Phi(\Xi)$ пространства $\sum$. Лакунарным радиусом преобразования Φ автор называет верхнюю грань радиусов сфер, содержащихся в $\sum \setminus \Phi(\Xi)$. Рассматривается случай, когда $\Phi = \Phi_\lambda$ зависит от вещественного параметра λ, меняющегося в некотором интервале J. Принимаются следующие допущения: I_1) преобразование $\Phi_\lambda(x)$ дифференцируемо по λ при любом $x \in \Xi$; I_2) для любой пары x_1, $x_2 \in \Xi$ и для почти всех $\lambda \in J$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{d\Phi_\lambda(x_1)}{d\lambda} - \frac{d\Phi_\lambda(x_2)}{d\lambda} \right\| \leqslant A(\lambda)\, k\, \left(\|\Phi_\lambda(x_1) - \Phi_\lambda(x_2)\| \right),$$

где $A(\lambda)$ — положительная и суммируемая в J функция, а $k(\xi)$ — неотрицательная, непрерывная и неубывающая функция от ξ при $\xi \geqslant 0$, причем, если $\xi > 0$, то функция $k(\xi)/\xi$ положительна и не возрастает; предполагается также, что функция $1/k(\xi)$ неинтегрируема в промежутке, содержащем точку $\xi = 0$. Доказывается, что при допущениях I_1), I_2) лакунарный радиус преобразования Φ_λ либо тождественно равен нулю, либо при любом $\lambda \in J$ положителен и конечен, либо тождественно равен бесконечности.

При условиях I_1), I_2) существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение T множества $\Phi_{\lambda_1}(\Xi)$ на $\Phi_{\lambda_2}(\Xi)$, так что $T\Phi_{\lambda_1}(x) = \Phi_{\lambda_2}(x)$; $x \in \Xi$, $\lambda_1, \lambda_2 \in J$. Примем еще одно допущение: I_3) $\sum$ есть полное пространство.

Т е о р е м а. Если выполняются допущения I_1), I_2), I_3) и $\Phi_{\lambda_1}(\Xi) = \sum$, то $\Phi_{\lambda_2}(\Xi) = \sum$ и T есть взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства $\sum$ на себя.

Только что сформулированная теорема позволяет установить перманентность некоторых свойств преобразования Φ_λ в том смысле, что Φ_λ обладает таким свойством при любом $\lambda \in J$, если оно обладает этим свойством при некотором фиксированном $\lambda \in J$. Таким свойством является, в частности, полная обратимость преобразования Φ_λ.

Частный случай: пусть преобразования Φ_0 и Φ_1 таковы, что $\Phi_0(\Xi) = \Phi_1(\Xi) = \sum$, и пусть для любой пары x_1, $x_2 \in \Xi$ и для любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, выполняется неравенство

$$\|\Delta\Phi_0 - \Delta\Phi_1\| \leqslant A(\lambda) \| (1-\lambda)\,\Delta\Phi_0 + \lambda \Delta\Phi_1 \|,$$

где $\Delta\Phi_i = \Phi_i(x_1) - \Phi_i(x_2)$ и функция $A(\lambda)$ суммируема в промежутке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (в тексте опечатка: в неравенстве справа оба раза пропущен знак Δ). Тогда, если пространство $\sum$ полно, а преобразование Φ_0 вполне обратимо, то Φ_1 также вполне обратимо. Отсюда в свою очередь вытекает следующее: Пусть $\sum$ — полное вещественное гильбертово пространство и Φ — преобразование пространства $\sum$ в себя. Если угол между векторами Δx и $\Delta\Phi(x)$ не превосходит некоторой постоянной, меньшей π, то Φ вполне обратимо в $\sum$.

С. Г. Михлин

8009. **Общая теория пространств Орлича.** К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Р у т и ц к и й Я. Б., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 1, 3—38

Приведено систематическое изложение теории пространств Орлича, очень полезное ввиду возрастающих приложений этой теории. Авторы доказывают некоторые теоремы Бирнбаума и Орлича (Birnbaum Z., Orlicz W., Studia math., 1931, 3; Orlicz W., Bull. internat. Acad. polon., sér. A, 1932; 1936, № 3—4), пополняют теорию некоторыми новыми утверждениями, содержащимися неявно в статьях Орлича, доказывают некоторые совершенно новые теоремы и вводят некоторые новые условия специализации пространств Орлича.

В § 1 описываются свойства N'-функций $M(u)$ (в смысле Бирнбаума и Орлича), определяется дополнительная функция $N(v)$ и доказывается неравенство Юнга.

В § 2 вводится условие (Δ_2): $M(2u) \leqslant kM(u)$ (для достаточно больших u, k — постоянная); дополнительная функция удовлетворяет этому условию в том и только в том случае, если $\overline{\lim}_{u \to \infty} M(lu)\,[lM(u)]^{-1} \geqslant 2$ для некоторого $l > 1$.

В § 3 определяются классы L_M как множества функций x, определенных и измеримых на ограниченном множестве G из евклидова пространства R^m, для которых $\int_G M[x(t)]\,dt < \infty$; пространство Орлича L_M^* есть класс таких функций x, что $\int_G x(t)\,g(t)\,dt < \infty$ для каждой функции $g \in L_N$.

В § 4 доказываются некоторые структурные свойства пространств Орлича, например: если $u \in L_M^*$, $v \in L_N^*$, то $\int_G u(t)\,v(t)\,dt \leqslant \|u\|_{L_M^*}\,\|v\|_{L_N^*}$; это неявно

утверждалось Бирнбаумом и Орличем. Если функция M не удовлетворяет условию (Δ_2), то ограниченные функции составляют нигде не плотное множество в L_M^*.

В § 5 доказывается, что для N'-функций M_1 и M_2 включение $L_{M_1}^* \subset L_{M_2}^*$ выполнено в том и только в том случае, если $M_2(u) \leqslant M_1(ku)$ для больших u и постоянного k. Затем вводится условие (Δ_3): функция $M(u)$ эквивалентна функции $|u| M(u)$ (т. е. они порождают одно и то же пространство Орлича). Если M удовлетворяет условию (Δ_3), то дополнительная функция N удовлетворяет условию (Δ_2) и функция $M(u)$ эквивалентна функции $N[M(u)]$.

В § 6 доказываются теоремы Орлича, касающиеся общего вида линейного функционала в L_M^*, и вводится понятие (o)-слабой сходимости (эквивалентной слабой сходимости, если удовлетворяется условие (Δ_2)): последовательность x_n (o)-слабо сходится к x_0, если

$$\int_G x_n(t)\, g(t)\, dt \to \int_G x_0(t)\, g(t)\, dt$$

для каждой функции g из замыкания (в пространстве L_M^*) множества L_M. Каждая (o)-слабо сходящаяся последовательность ограничена; пространство L_M^* является (o)-слабо полным и (o)-слабо компактным.

В § 7 приводятся примеры пространств Орлича. Статья заканчивается условиями компактности подмножеств.

A. Alexiewicz

8010. Пространства Орлича над множествами бесконечной меры. Соболев В. И., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 2, 77—84

Исследуются свойства пространств Орлича L_M и L_M^* в случае, когда основное множество интегрирования G неограничено (см. реф. 8009). Обнаруживается, что основные факты, касающиеся пространств Орлича, сохраняются. В частности, $L_{M_1} \subset L_{M_2}$ тогда и только тогда, когда $M_2(u) \leqslant kM_1(u)$ для больших u и постоянного k; пространство L_M^* полно; если удовлетворяется условие (Δ_2), то $L_M = L_M^*$. Сходимость в M-среднем эквивалентна сходимости по норме в L_M^* тогда и только тогда, когда удовлетворяется условие (Δ_2).

A. Alexiewicz

8011. Сопряженные пространства к пространствам Орлича. Люксембург, Занен (Conjugate spaces of Orlicz spaces. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 2, 217—228; Indagationes math., 1956, 18, № 2, 217—228 (англ.)

Пусть $\Phi(u)$ — такая действительная выпуклая функция, определенная при $u \geqslant 0$, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(u) \geqslant 0$ при $u > 0$ и $\Phi(u) \not\equiv 0$, и пусть $\Psi(u)$ — дополнительная функция. Рассматриваются функции, определенные на некотором множестве Δ и измеримые относительно полной вполне σ-конечной меры μ. Функционалы

$$M_\Phi(f) = \int_\Delta \Phi(|f(x)|)\, d\mu \quad \text{и} \quad M_\Psi(f) = \int_\Delta \Psi(|f(x)|)\, d\mu$$

являются модулярными в смысле Накано. Эти функционалы определяют в свою очередь новые функционалы

$$\|f\|_{M\Phi} = \inf\left\{k^{-1} : k \geqslant 0,\ M_\Phi(kf) \leqslant 1\right\},$$

$$\|f\|_{M\Psi} = \inf\left\{k^{-1} : k \geqslant 0,\ M_\Psi(kf) \leqslant 1\right\}.$$

Пространства Орлича $L_{M\Phi} = \left\{f : \|f\|_{M\Phi} < \infty\right\}$ и $L_{M\Psi} = \left\{f : \|f\|_{M\Psi} < \infty\right\}$ с нормами $\|f\|_{M\Phi}$ и $\|f\|_{M\Psi}$ соответственно являются банаховыми пространствами.

Далее определяются некоторые пространства, ассоциированные с $L_{M\Phi}$ и $L_{M\Psi}$: пространство, ассоциированное с $L_{M\Psi}$, есть пространство

$$L_\Phi = \left\{f : \|f\|_\Phi = \sup\left\{\int fg\,d\mu : \|g\|_{M\Psi} \leqslant 1\right\}\right\};$$

пространство L_Ψ, ассоциированное с $L_{M\Phi}$, определяется двойственным образом.

Показывается, что функционалы $M_\Phi(f)$, $\|f\|_{M\Phi}$, $\|f\|_\Phi$ (соответственно двойственные им функционалы) можно таким образом продолжить на все сопряженное пространство $L_{M\Psi}^*(L_{M\Phi}^*)$, что основные соотношения

$$M_\Psi(g) = \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| - M_\Phi(f) : f \in L_\Phi\right\},$$

$$M_\Phi(f) = \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| - M_\Psi(g) : g \in L_\Psi\right\},$$

$$\|f\|_{M\Phi} \leqslant \|f\|_\Phi \leqslant 2\|f\|_{M\Phi}$$

в некотором смысле будут сохраняться. Если $g^* \in L_{M\Phi}^*$, то продолжением функционала M_Φ будет

$$M_\Phi(g^*) = \sup\left\{|g^*(g)| - M_\Psi(g) : g \in L_\Psi\right\},$$

функционал $M_\Psi(f^*)$ определяется аналогично. Оба функционала модулярны и

$$M_\Phi(f) = \sup\left\{|f^*(f)| - M_\Psi(f^*) : f^* \in L_{M\Phi}^*\right\}$$

для каждой функции $f \in L_\Phi$; аналогичная формула справедлива для $M_\Psi(g)$.

Функционалы $\|g\|_{M\Phi}$ и $\|g\|_\Phi$ продолжаются следующим образом:

$$\|g^*\|_{M\Phi} = \sup\left\{|g^*(g)| : \|g\|_\Psi \leqslant 1\right\},$$

$$\|g^*\|_\Phi = \sup\left\{|g^*(g)| : \|g\|_{M\Psi} \leqslant 1\right\}.$$

Тогда $\|g^*\|_{M\Phi} \leqslant \|g^*\|_\Phi \leqslant 2\|g^*\|_{M\Phi}$ и

$$\|g^*\|_\Phi = \inf\left\{k^{-1}\left[1 + M_\Phi(kg^*)\right] : k > 0\right\}.$$

Во второй части статьи исследуются слабо сходящиеся последовательности.

Последовательность $f_n \in L_\Phi$ называется (слабо) сходящейся в $\sigma(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии (в $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии) к функции $f \in L_\Phi$, если $\int (f_n - f)\, gd\mu \to 0$ (если $\int |f_n - f|\, |g|\, d\mu \to 0$) для каждой функции $g \in L_\Psi$.

Основные результаты:

Следующие утверждения эквивалентны: а) $\Phi(u) > 0$ для $u > 0$; б) $\lim_{k \to +0} k^{-1} M_\Psi(kg) = 0$ для каждой функции $g \in L_\Psi$; в) из $M_\Phi(g^*) = 0$ следует, что $g^* = 0$; г) из $M_\Phi(f_n) \to 0$ следует, что $f_n \to 0$ в $\sigma(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии; д) из $M_\Phi(f_n) \to 0$ следует, что $f_n \to 0$ в $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии.

Если $f_n \to f$ в $\sigma(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии, то $M_\Phi(kf) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} M_\Phi(kf_n)$ для любого $k \geqslant 0$.

Если удовлетворяется условие а) и $M_\Phi(k(f_n - f)) \to 0$ для некоторого $k > 0$, то $f_n \to f$ в $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии.

Если $f_n \to f$ в $|\sigma|(L_\Phi, L_\Psi)$-топологии и $\lim_{n\to\infty} M_\Phi(kf_n) = M_\Phi(kf)$ для любого $k > 0$, то $\|f_n - f\|_\Phi \to 0$. A. Alexiewicz

8012. Распространение мультипликативных функций множества со значениями в нормированном кольце. Прекопа (Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra. Prékopa A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 2, 201—213 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается функция множества f, заданная на кольце множеств $\mathscr{R}$, со значениями в коммутативном нормированном кольце $\mathscr{B}$ с единицей. Функция f называется вполне мультипликативной, если для любой последовательности $\{A_k\}$ множеств из $\mathscr{R}$, попарно непересекающихся и таких, что $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathscr{R}$, имеет место соотношение $\prod_{k=1}^\infty f(A_k) = f\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)$. Указывается условие, при котором функция f может быть распространена с сохранением полной мультипликативности на наименьшее σ-кольцо, содержащее $\mathscr{R}$. Это условие состоит в сходимости ряда $\sum_{k=1}^\infty \|e - f(A_k)\|$ для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_k\} \subset \mathscr{R}$. При этом предполагается, что $\|f(A)\| \leqslant 1$ $(A \in \mathscr{R})$. Доказывается единственность распространения.

Г. П. Акилов

8013. Заметка об алгебре ограниченных функций. Вулфсон (A note on the algebra of bounded functions. Wolfson Kenneth G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 852—855 (англ.)

Коммутативная нормированная алгебра K с единицей и инволюцией изоморфна алгебре всех ограниченных функций на некотором множестве X тогда и только тогда, когда носитель (пространство максимальных идеалов) алгебры K содержит плотное подмножество изолированных точек и каждое открытое множество, замыкание которого не содержит новых внутренних точек, является замкнутым. Г. Е. Шилов

8014. О конечной размерности некоторых банаховых алгебр. Огасавара (Finite-dimensionality of certain Banach algebras. Ogasawara Tôzirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, A17, 359—364) (англ.)

Пусть A — банахова $*$-алгебра, в которой $k\|x\|^2 \leqslant \|xx^*\|$ для нормальных элементов и $yy^* = 0$ только в случае $y = 0$. Доказывается эквивалентность следующих свойств: а) A рефлексивна, б) A слабо полна, в) второе сопряженное пространство сепарабельно, г) A имеет конечную размерность. Доказательство использует тот факт, что максимальные абелевы $*$-подалгебры спектрально представимы. Показывается также, что слабо непрерывные операторы в гильбертовом пространстве H могут быть охарактеризованы в $B(H)$ некоторым свойством банаховых алгебр («слабо полная непрерывность»).

R. Arens

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 598.

8015. Замечание к теории неванлинновских пространств. Лоухивааара (Bemerkung zur Theorie der Nevanlinnaschen Räume. Louhivaara Ilppo Simo), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A-I, № 232, 7 S. (нем.)

Устанавливается достаточное условие существования ортогональной проекции произвольного элемента на данное подпространство неванлинновского пространства (РЖМат, 1955, 4534; 1957, 1585). Г. П. Акилов

8016. Интегрирование операторных функций по спектральной мере. Лянце В. Э., Научн. зап. Львовск. политехн. ин-т, 1956 (1957), вып. 38, 32—44

Строятся и изучаются интегралы вида

$$I(A) = \int_{\Delta_\infty^n} A(\xi)\, E(\Delta_\xi), \qquad (1)$$

где Δ_∞^n есть n-мерное евклидово пространство с точками $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$; $E(\Delta)$ есть n-мерная спектральная мера в унитарном пространстве H; операторная функция $A(\xi)$ при каждом $\xi \in \Delta_\infty^n$ имеет значение в совокупности $N(E)$ ограниченных линейных операторов, отображающих пространство H в себя и коммутирующих с $E(\Delta)$.

Основные определения: 1) функция $A(\xi)$ называется измеримой, если прообраз любой сферы (в смысле нормы операторов) из $N(E)$ измерим относительно меры $E(\Delta)$; 2) функция $A(\xi)$ вполне ограничена, если для каждого $\varepsilon > 0$ во множестве ее значений существует конечная ε-сеть, состоящая из ее значений $A(\xi_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Интеграл (1) строится сначала для конечнозначных измеримых функций $A(\xi)$, затем для измеримых и вполне ограниченных функций и, наконец, распространяется на некоторые измеримые функции более общего вида (в частности, непрерывные), причем оператор $I(A)$ может оказаться неограниченным.

Доказывается, что соответствие $A \to I(A)$ есть алгебраический гомоморфизм. М. К. Фаге

8017. О коммутаторах и якобиевых матрицах. Патнам (On commutators and Jacobi matrices. Putnam C. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1026—1030 (англ.)

Рассматриваются ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве. Для коммутатора $C = AB - BA$ двух операторов A и B через W обозначается замыкание множества чисел (Cx, x), где $\|x\| = 1$. Множество W выпукло в комплексной плоскости. Точка $z \in W$ называется внутренней точкой множества W в каждом из следующих трех случаев: а) если W двумерно, то z не принадлежит границе множества W; б) если W — линейный сегмент, то z не совпадает с его концом; в) W состоит из одной точки z.

Основной результат: Пусть A — нормальный оператор со спектральным разложением $A = \int z\,dK(z)$ и $\int_S dK = I$ для некоторого измеримого (по отношению к $K(z)$) множества S. Если S можно покрыть последовательностью попарно неперекрывающихся измеримых множеств Δ_n с произвольно малой суммой диаметров, то точка 0 является внутренней для W.

Более того, если A — самосопряженный или унитарный оператор и существует множество Z (одномерное) меры нуль, для которого $\int_Z dK = I$, то 0 есть внутренняя точка для W.

Отметим одно из следствий этой теоремы: Если оператор $C = AA^* - A^*A$ неотрицателен (неположителен), то либо 1) $C = 0$, либо 2) если $A + A^*$ имеет спектральное разложение $\int \lambda dE(\lambda)$, то

$\int_Z dE < I$ для всякого нульмерного множества Z на вещественной оси.

Этот результат применяется к якобиевым матрицам $A = (a_{ij})$, где $a_{i,\,i+1} = b_i$ и $a_{ij} = 0$ для $j \neq i+1$. Тогда, если $0 < |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots$, то $A + A^* = D$—якобиева, а $C = DA^* - A^*D \neq 0$ — неотрицательно определенная матрица. Поэтому, если $D = \int \lambda dE(\lambda)$, то $\int_Z dE < I$ для всякого нульмерного множества Z на вещественной оси. И. С. Иохвидов

8018. **О σ-слабой топологии W^*-алгебр.** Сакаи (On the σ-weak topology of W^*-algebras. Sakai Shôichirô), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 5, 329—332 (англ.)

Изучается вопрос о σ-слабой непрерывности алгебраических изоморфизмов одного слабо замкнутого самосопряженного кольца операторов в гильбертовом пространстве (W^*-алгебры) на другое.

Лемма 2. Пусть M есть AW^*-алгебра, N есть C^*-алгебра (банахово кольцо с инволюцией, в котором $|x^*x| = |x|^2$), φ — изоморфизм кольца M на N. Тогда φ равномерно непрерывен на M.

Пусть M — нормированное кольцо. Подпространство $L \subset M^*$ называется инвариантным, если для всякого элемента $f \in L$ имеем $f_a \in L$ и ${}_bf \in L$, где $f_a(x) = f(xa)$, ${}_bf(x) = f(bx)$. Сильно замкнутое подпространство $L \subset M^*$ называется минимальным, если оно слабо плотно в M^*, а всякое его сильно замкнутое подпространство не плотно (слабо) в M^*.

Со ссылкой на печатающуюся работу автора устанавливается результат. Если для C^*-алгебры M в M^* найдется инвариантное минимальное подпространство F, то M есть W^*-алгебра, и слабая топология, определенная с помощью функционалов из F, есть слабая топология в M.

Автор отмечает, что при доказательстве этого результата не используется понятие положительного функционала.

Теорема 2. Пусть M есть W^*-алгебра, N есть C^*-алгебра и φ — изоморфизм (не обязательно сохраняющий соотношение сопряженности) алгебры M на N. Тогда N есть W^*-алгебра и φ слабо непрерывен вместе с φ^{-1}.

Доказательство заключается в проверке того, что $\varphi^{*-1}(M_*)$ есть минимальное инвариантное подпространство пространства N^*, где M_* — множество слабо непрерывных функционалов на M, и последующем применении леммы 2.

Без доказательства формулируется теорема: C^*-алгебра имеет единицу в том и только в том случае, если ее единичная сфера имеет экстремальную точку. Б. М. Макаров

8019. **О линейных операторных уравнениях с оператором, зависящим от параметра.** Маркова В. А., Уч. зап. Пензенск. гос. пед. ин-та, 1956, **4**, 111—123

В первой части работы изучается операторное уравнение

$$\varphi = \sum_{n=0}^{m} \lambda^n K_n \varphi + f, \qquad (1)$$

где φ и f — элементы гильбертова пространства H, λ — комплексный параметр, а K_n — самосопряженные, попарно ортогональные ($K_iK_k = 0$, $i \neq k$), вполне непрерывные операторы, действующие в пространстве H. Основные результаты:

Теорема 1. Или уравнение (1) не имеет решения для всех f ни при каком значении λ, или же имеет единственное решение для всякого f при любом λ за исключением быть может счетного множества значений с точкой сгущения в ∞.

Теорема 3. Для того чтобы элемент $\varphi \in H$ был собственным элементом уравнения $\varphi - \sum_{n=1}^{m} \lambda^n K_n \varphi = 0$, соответствующим собственному значению $\lambda = \lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид

$$\varphi = \lambda_0 \varphi_1 + \lambda_0^2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_0^m \varphi_m, \qquad (2)$$

где φ_n — собственный элемент оператора K_n, соответствующий собственному значению λ_0^n.

Теорема разложения. Всякий элемент вида $f = \sum_{n=1}^{m} \lambda^n K_n h$ разлагается в сходящийся по норме ряд $f = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(f,\ \varphi_k^{(n)}\right) \varphi_k^{(n)}$, где $\left\{\varphi_k^{(n)}\right\}$ — ортонормированная система собственных элементов оператора K_n, соответствующих собственным значениям $\left\{\mu_k^{(n)}\right\}$.

Теорема 1 известна и является частным случаем предложений, доказанных в разное время М. В. Келдышем (Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 1, 11—14), И. Ц. Гохбергом (Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 4, 629—632) и референтом (РЖМат, 1954, 2620). Теорема 3 сформулирована неточно. Необходимость представления (2) имеет место при том условии, что некоторые слагаемые вида $\lambda_0^n \varphi_n$ ($1 \leqslant n \leqslant m$) могут отсутствовать. Доказательство теоремы разложения слишком длинно, она может быть получена в двух строчках на основании классической теоремы Гильберта—Шмидта, примененной к операторам K_n, и попарной ортогональности последних.

Во второй части работы изучается система уравнений

$$\varphi = \sum_{n=0}^{s} \lambda^n K_n \psi, \quad \psi = \sum_{n=0}^{s} \lambda^n K_n^* \varphi, \qquad (3)$$

где K_n^* — оператор, сопряженный с оператором K_n. Система (3) приводится к уравнению вида (1) при $m = 2s$. Указывается достаточное условие существования собственного значения системы (3). Теорема 6 неверна. Доказательство ее дефектно, ибо из условий теоремы не следует второе из равенств (3.16). Легко видеть, что теореме 6 противоречит например система интегральных уравнений вида

$$\varphi = \lambda K_1 \psi + \lambda^2 K_2 \psi, \quad \psi = \lambda K_1^* \varphi + \lambda^2 K_2 \varphi,$$

где

$$K_1\psi = \int_a^b \varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,\psi(y)\,dy, \quad K_2\psi = \int_a^b \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,\psi(y)\,dy,$$

а функции φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \varphi_1(y)\,\psi_2(y)\,dy = \int_a^b \varphi_2(y)\,\psi_1(y)\,dy = 0,$$

$$\int_a^b \psi_1(y)\,\psi_2(y)\,dy \neq 0.$$

Неверны также все остальные результаты, основанные на теореме 6.

Примечание референта. Уравнение (1) в случае, когда K_n — интегральные операторы в пространстве L_2 с ядрами, попарно ортогональными в смысле Гурса, было изучено референтом (Сообщ. АН ГрузССР, 1947, **8**, № 4, 205—210; 1948, **9**, № 2, 91—98). Система (3) для случая $s = 1$ и инте-

гральных операторов K_0, K_1, действующих в L_2, также была изучена референтом (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1948, 16, 143—167) Д. Ф. Харазов

8020. Об одном классе операторов, нелинейно зависящих от параметра. Харазов Д. Ф., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 5, 819—822

В гильбертовом пространстве X рассматривается уравнение

$$x - A_0x - \lambda A_1x - \lambda^2 B_\lambda x = y,$$

где A_0 — вполне непрерывный самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию $(A_0x, x) < (x, x)$; A_1 — самосопряженный оператор с конечной абсолютной нормой; $B_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - a_i)^{-1} H_i$, причем a_i — действительные числа, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{-1} < +\infty$, H_i — конечномерные самосопряженные операторы с равномерно ограниченными следами и абсолютными нормами и при каждом $i = 1, 2, \ldots$ все собственные значения оператора H_i и число a_i имеют противоположные знаки.

Для формулирования результатов введено гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $a = (y_0, y_1, \ldots)$ элементов $y_i \in X$ со скалярным произведением

$$(a, a') = \left((E - A_0)\, y_0, y_0'\right) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(H_i y_i, y_i'\right).$$

Результаты аналогичны тем, которые указаны в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1957, 7169) для уравнения $x - \lambda A_1 x - \lambda^2 A_2 x = y$ с вполне непрерывными операторами A_1 и A_2. М. К. Фаге

8021. О производных функционалах от аналитических функционалов. Дель-Паскуа (Sui funzionali derivati dei funzionali analitici. Del Pasqua Dário), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 211—227 (итал.)

Пусть $F[y]$ — аналитический в смысле Фантаппье функционал, заданный на некотором открытом множестве $\mathscr{R}$ локально аналитических функций. В работе изучается структура области определения производного функционала:

$$F^{(n)}[y(t);\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] =$$

$$= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1 \partial\varepsilon_2 \ldots \partial\varepsilon_n} F \times \left[y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t} \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0}. \qquad (1)$$

Доказано, в частности, что при фиксированной функции $y_0 \in \mathscr{R}$ с областью определения M_0 проекция области определения функционала (1) на n-мерное комплексное пространство есть множество $\bigcup_{A \in \alpha\mathscr{A}_{y_0}} (CA)^n$, где $\alpha\mathscr{A}_{y_0}$ — совокупность замкнутых множеств комплексной плоскости, являющихся базами окрестностей функций y_0, входящих в $\mathscr{R}$, CA — открытое дополнение множества A, $(CA)^n$ — топологическое произведение n множеств, равных CA.

В заключение автор приводит некоторые замечания о сходимости ряда Фантаппье. В. П. Хавин

8022. О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами. Каазик Ю. Я., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 195—199

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$P(x) = 0, \qquad (1)$$

где $y = P(x)$ — аналитический оператор из банахова пространства $\mathfrak{X}$ в нормированное пространство $\mathfrak{Y}$. Приближенное решение уравнения (1) находится с помощью процесса:

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = F_n \Gamma_n P(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad (2)$$

где $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$, а F_n — некоторый линейный оператор, составленный из операторов E, $\Gamma_n P''(x_n), \ldots, \Gamma_n P^{(k)}(x_n)$ (E — единичный оператор в пространстве $\mathfrak{X}$, k — фиксированное натуральное число) и элемента $\Gamma_n P(x_n)$.

Если выполнены условия:

а) $\|F_n\| \leqslant \delta_n = \delta_n(\eta_n, A_n, H_n)$, причем $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$, где $\|\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant \eta_n$, $\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \right\| \leqslant A_n H_n^{j-1}$ ($n = 0, 1, \ldots$; $j = 2, 3, \ldots$);

б) справедливы неравенства:

$$1) \quad \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta x_{n+1}^j \right\| \leqslant p_n h_n^k \eta_n,$$

где

$$h_n = H_n \delta_n \eta_n < 1 \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{h_n \to 0}}\, p_n < \infty;$$

$$2) \quad \frac{p_{n+1}(1 - h_{n+1}) + A_{n+1}\delta_{n+1}}{q_{n+1}(1 - h_{n+1})} h_{n+1}^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p_n(1 - h_n) + A_n\delta_n}{q_n(1 - h_n)} h_n^k l_n^{k^2},$$

где $q_n = 1 - A_n \frac{h_n(2 - h_n)}{(1 - h_n)^2}$ и

$$l_n^k = \frac{p_n(1 - h_n) + A_n\delta_n}{q_n^2(1 - h_n)^4} h_n^k \leqslant 1, \qquad (3)$$

то имеет место

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) существует обратный оператор Γ_0,

2) оператор P аналитичен в сфере

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{\delta_0\eta_0}{1 - a_0 l_0^{k(k+1)}}, \qquad (4)$$

где $a_0 = q_0(1 - h_0)^3$;

3) при $n = 0$ выполнены неравенства (3) и

$$h_n < 1 - \sqrt{\frac{A_n}{1 + A_n}};$$

тогда уравнение (1) имеет в сфере (4) решение x^*, к которому сходится полученная из (2) последовательность $\{x_n\}$ со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{a_0^n l^{(k+1)^n - 1} \delta_0\eta_0}{1 - a_0 l_0^{k(k+1)}}.$$

М. А. Мертвецова

8023. Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений. Каазик Ю. Я., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 4, 579—582

Рассматривается уравнение

$$P(x) = 0, \qquad (1)$$

где P — оператор из банахова пространства X в нормированное пространство Y. Приближенное решение уравнения (1) находится с помощью итерационного процесса

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = -(E + \alpha R_n)^{-1} \times \\ \times [E + (\alpha + 1) R_n] \Gamma_n P(x_n), \qquad (2)$$

где E — единичный оператор, $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$,

$$R_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$$

и α — вещественное число. Доказывается теорема 1: Если выполнены условия: 1) существует обратный оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, причем $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$;
2) оператор P аналитичен в сфере

$$\| x - x_0 \| \leqslant \frac{\delta_0 \eta_0}{1 - s_0^2 h_0^2 (1 - h_0)}, \qquad (3)$$

причем

$$\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leqslant A_0 H_0^{j-1} \quad (j = 2, 3, \ldots);$$

3) величины η_0, A_0, H_0 удовлетворяют неравенствам $|\alpha| A_0 H_0 \eta_0 < 1$, $|\alpha + 1| A_0 H_0 \eta_0 < 1$, $h_0 = H_0 \delta_0 \eta_0 < 1$, где

$$\delta_0 = \frac{1 - (|\alpha| - 1) A_0 H_0 \eta_0}{1 - |\alpha| A_0 H_0 \eta_0}, \quad q_0 = 1 - A_0 \frac{h_0 (2 - h_0)}{(1 - h_0)^2} > 0,$$

$$p_0^2 = \frac{s_0^2 h_0^2}{q_0 (1 - h_0)^2} \leqslant 1,$$

$$s_0^2 = \frac{[|2 + \alpha| - (|2\alpha + \alpha^2| - 1) A_0 H_0 \eta_0](A_0 \delta_0)^2 (1 - h_0) + A_0 \delta_0 (1 - |\alpha| A_0 H_0 \eta_0)^2}{q_0 (1 - h_0)^2 (1 - |\alpha| A_0 H_0 \eta_0)^2};$$

то уравнение (1) имеет в сфере (3) решение x^*, к которому сходится процесс (2) со скоростью

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{a_0^{n} p_0^{3^n - 1}}{1 - a_0 p_0^6} \delta_0 \eta_0 \quad (a_0 = q_0 (1 - h_0)^3).$$

Если известна лишь дифференцируемость (до третьего порядка включительно) оператора P, то имеет место следующая теорема 2.

Если выполнены условия:
1) существует Γ_0, причем $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$, $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$;
2) в сфере

$$\| x - x_0 \| \leqslant \frac{\varepsilon_0 \eta_0}{1 - g_0 r_0^2 k_0^2} \qquad (4)$$

существуют $P''(x)$ и $P'''(x)$, причем

$$\frac{1}{2} \| P''(x) \| \leqslant K, \qquad \frac{1}{6} \| P'''(x) \| \leqslant L;$$

3) числа η_0, B_0, K и L удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha| k_0 = |\alpha| B_0 K \eta_0 < 1, \qquad |\alpha + 1| k_0 < 1,$$

$$2k_0 \varepsilon_0 = 2k_0 \frac{1 - (|\alpha| - 1) k_0}{1 - |\alpha| k_0} < 1,$$

$$l_0 \varepsilon_0 = B_0 L \eta_0^2 \varepsilon_0 \leqslant A k_0^2, \qquad t_0 k_0 \leqslant 1,$$

где

$$t_0^2 = \frac{|2 + \alpha| - A - (|2\alpha + \alpha^2| - 1) k_0}{g_0^2 (1 - |\alpha| k_0)^2},$$

$$g_0 = 1 - 2k_0 \varepsilon_0,$$

то уравнение (1) имеет в сфере (4) решение x^*, к которому сходится процесс (2) со скоростью

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{g_0^n (t_0 k_0)^{3^n - 1} \varepsilon_0 \eta_0}{1 - g_0 (t_0 k_0)^6}.$$

М. А. Мертвецова

8024. О методе последовательных приближений. **Шефер** (Über die Methode sukzessiver Approximationen. Schaefer Helmut), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 59, № 3, 131—140 (нем.)

Обобщается следующая теорема М. А. Красносельского (РЖМат, 1956, 5984): Пусть T — выпуклое ограниченное замкнутое множество равномерно выпуклого банахова пространства E. Пусть, далее, A — вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий условию Липшица с константой, равной единице, и отображающий множество T в себя. Тогда последовательность

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} (Ax_n + x_n) \qquad (1)$$

при любом выборе элемента $x_0 \in T$ сильно сходится к решению уравнения $x = Ax$ (Единственность решения уравнения $x = Ax$ не предполагается).

Во-первых, автор показывает, что последовательность (1) может быть заменена последовательностью

$$x_{n+1} = \alpha A x_n + (1 - \alpha) x_n, \qquad (2)$$

где α — фиксированное число, $0 < \alpha < 1$.

Во-вторых, требование полной непрерывности оператора A можно заменить требованием слабой непрерывности. При этом последовательность (2) слабо сходится к решению уравнения $x = Ax$. Это предложение доказано лишь для гильбертовых пространств.

В конце работы приведены примеры, показывающие зависимость элемента $\lim x_n$ от числа α.

А. И. Перов

8025. О принципе мажорант для метода Чебышева. **Мираков В. Е.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 171—174

Метод Чебышева, предложенный М. И. Нечепуренко для решения функциональных уравнений в пространстве типа B (РЖМат, 1955, 2306), распространяется на обобщенно-нормированные пространства B_k. Сходимость доказывается методом мажорант Л. В. Канторовича.

А. Н. Балуев

8026. О продолжении линейных положительных функционалов в частично упорядоченном пространстве. **Бауэр** (Sur le prolongement des formes linéaires positives dans un espace vectoriel ordonné. Bauer Heinz), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 3, 289—292 (франц.)

Пусть E — локально выпуклое линейное пространство с умножением на вещественные числа, P — конус положительных элементов. Пусть на подпространстве $M \subset E$ определен функционал f.

Теорема 2. Для возможности продолжить функционал f до положительного непрерывного функционала $\bar{f}$, определенного на E, необходимо и достаточно, чтобы множество $f(M \cap (V + P))$ было ограничено снизу хотя бы для одной окрестности V нуля в пространстве E.

А. Н. Балуев

8027. О полных продолжениях линейных непрерывных отображений. Тома (Über vollständige Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen. Thoma Elmar), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953 (1954), 77—80 (нем.)

Пусть R — действительная σ-полная векторная структура, $w(\mathfrak{M})$ — пространство действительных конечных функций на абстрактном множестве $\mathfrak{M}$ и $F \equiv w(\mathfrak{M}) \mid F \mid r$ — линейное непрерывное отображение подструктуры $r \subset R$ в $w(\mathfrak{M})$. Дается набросок двух методов продолжения отображения F до $w(\mathfrak{N}) \mid I \mid s$ и $w(\mathfrak{M}) \mid S^* \mid r^*$ соответственно, где $r \subset s$, $r \subset r^*$; I есть продолжение отображения S^*, но не известно, будет ли это продолжение всегда собственным. По поводу детальных доказательств автор отсылает к своей диссертации (Erlangen, 1952). Он также отсылает к статье Накано (Nakano H., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1943, **19**, 138—143), хотя ему стало известно о работе Накано только после сдачи своей работы в печать. I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 376

8028. Об одной общей формуле интегрирования по частям. Пок, Ревю (Sur une formule générale d'intégration par parties. Pauc Chr., Revuz A.), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **42**, 307—312 (франц.)

На основе теории, развитой в статье второго из авторов (РЖМат, 1957, 7184), доказывается общая формула интегрирования по частям в упорядоченном топологическом пространстве X:

$$\int_X V\, dm_U = \int_X U^*\, dm_V.$$

Здесь $U(x)$, $V(x)$ — вещественные функции ограниченной вариации, непрерывные справа ($x \in X$), m_U — мера Радона, определяемая соотношением $m_U C_-(x) = U(x)$ (аналогично определяется m_V), а $U^*(x) = m_U C_+(x)$. Пространство X предполагается упорядоченным топологическим пространством как относительно основного, так и относительно дуального упорядочения. Частный случай доказанной формулы был установлен первым автором (РЖМат, 1956, 8696). Б. З. Вулих

8029. Средние на полугруппах и свойство распространимости Хана—Банаха. Силверман (Means on semigroups and the Hahn-Banach extension property. Silverman Robert J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **83**, № 1, 222—237 (англ.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 4978) рассматривались абстрактные полугруппы, обладающие свойствами MEP или HBEP (monotone extension property, Hahn—Banach extension property). В реферируемой статье устанавливаются различные достаточные условия того, чтобы данная полугруппа обладала упомянутыми свойствами, которые понимаются, впрочем, несколько иначе, чем раньше. Как и в первой статье вопрос связывается с наличием на данной полугруппе инвариантного среднего. Г. П. Акилов

8030. Экстремальные максимальные идеалы в частично упорядоченном линейном пространстве. Бонсалл (Extreme maximal ideals of a partially ordered vector space. Bonsall F. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 831—837 (англ.)

Изучаются идеалы в линейном частично упорядоченном пространстве V с единицей e. Основные определения даны в статье автора (РЖМат, 1956, 1494); при этом V может не быть структурой. Линейный положительный функционал φ на V называется нормированным, если $\varphi(e) = 1$. Каждому максимальному идеалу $M \subset V$ сопоставляется нормированный функционал φ_M, для которого M является нулевой гиперплоскостью. Максимальный идеал M называется экстремальным, если функционал φ_M — экстремальная точка выпуклого множества всех нормированных линейных положительных функционалов.

Идеал $J \subset V$ называется совершенным, если для каждого $x \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $y \in J$, что $-(\varepsilon e + y) \leqslant x \leqslant \varepsilon e + y$. Для экстремальности максимального идеала необходимо и достаточно, чтобы он был совершенным. Если размерность пространства V больше единицы, то в V существует собственный совершенный идеал, отличный от (0). Каждый собственный совершенный идеал содержится в максимальном совершенном идеале.

В случае, когда V — структура (и, тем самым, K-линеал), идеал $J \subset V$ называется структурным, если $x \in J$ влечет $|x| \in J$. Структурные идеалы совпадают с нормальными подлинеалами. Для экстремальности максимального идеала K-линеала V необходимо и достаточно, чтобы он был структурным.

Из доказанных теорем автор выводит теорему М. Г. Крейна и Д. П. Мильмана (Studia math., 1940 **9**, 133—138) в несколько обобщенном виде: Пусть $p(x)$ — сублинейный функционал на вещественном векторном пространстве W и пусть H — выпуклое множество всех таких линейных функционалов φ на W, что $\varphi(x) \leqslant p(x)$ $(x \in W)$; тогда для любого элемента $x_0 \in W$ существует экстремальная точка φ_0 в H, удовлетворяющая условию $\varphi_0(x_0) = p(x_0)$. Б. З. Вулих

8031. Пространство аналитических функций и его применение к задаче Коши—Ковалевской. Фет А. И., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 215—222

Вводится полуупорядоченное пространство $A^N_{P_a}$ комплексов аналитических функций: $f \in A^N_{P_a}$, если

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_N), \text{ где}$$

$$f_r(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1, \ldots, k_m} a^{(r)}_{k_1 \ldots k_m} z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}, \quad k_j \geqslant 0$$

$$|z_j| < a \quad (j = 1, \ldots, m), \quad r = 1, 2, \ldots, N; \quad f \geqslant 0,$$

если $\operatorname{Re}(a^{(r)}_{k_1 \ldots k_m}) \geqslant 0$, $\operatorname{Im}(a^{(r)}_{k_1 \ldots k_m}) \geqslant 0$ для $r = 1, 2, \ldots, N$. В простейшем случае $N = m = 1$ (o)-сходимость совпадает с равномерной сходимостью в любой замкнутой подобласти круга $|z| < a$. Доказательство теоремы Коши—Ковалевской проводится по схеме метода мажорант Л. В. Канторовича для уравнения вида $u = T(u)$ в пространстве $A^N_{P_a}$. Доказывается корректность задачи и сходимость к решению последовательности итераций вида $u_{l+1} = T(u_l)$. А. Н. Балуев

8032. Об алгебраической теории меры и теореме Хана—Банаха. Коттлар (Sobre la teoria algebraica de la medida y el teorema de Hahn—Banach. Cottlar Misch a). Rev. Union mat. argent. y Asoc. fis. argent., 1955, **17**, 9—24 (исп.)

Пусть X — упорядоченная абелева полугруппа с выделенным элементом e и $p(x)$ — определенный на X выпуклый функционал. Запись

$$f \in [X, f(e) = a; p] \tag{1}$$

означает, что $f(x)$ — аддитивный монотонный функционал, определенный на X и удовлетворяющий условиям $f(e) = a$ и $f(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

Условие (1) эквивалентно следующим двум: 1) $f(e)=a$; 2) из $\sum_i x_i < \sum_i y_i + z$ следует $\sum_i f(x_i) \leqslant \sum_i f(y_i) + p(z)$ для любых x_i, y_i, $z \in X$. Если Y — подмножество полугруппы X, содержащее e, то включение $f \in [Y, f(e)=a; p]$ означает, что функционал f определен на Y, $f(e)=a$ и условие 2) выполняется для x_i, $y_i \in Y$, $z \in X$. Элемент x сравним с e, если найдутся такие натуральные m', n', n'' и элементы z', z'', что

$$m'e \prec n'x + z', \qquad x \prec n''e + z''.$$

Множество элементов, сравнимых с e, обозначается через $Y(e)$.

Доказываются следующие обобщения теоремы Хана—Банаха:

I. Если $e \in Y \subset Y(e)$ и $f_0 \in [Y, f_0(e)=a; p]$, то существует такой функционал $f \in [Y(e), f(e)=a; p]$, что $f(x)=f_0(x)$ на Y.

II. Для существования функционала $f \in [Y(e), f(e)=a; p]$ необходимо и достаточно, чтобы из $ne \prec me + z$ следовало $(n-m)\,a \leqslant p(z)$.

Отсюда получается теорема Хана—Банаха для вещественного линейного нормированного пространства, если положить $x \prec y$, когда $x=y$.

Пусть далее $R=\{t\}$ — точечное множество, $G=\{g\}$ — группа преобразований множества R на себя. Если S — фиксированное подмножество из R, то $B(S)$ есть совокупность множеств $A=\bigcup_{i=1}^{n} g_i S$, $g_i \in G$, и $[R, S, G]$ — совокупность конечных, неотрицательных, аддитивных мер, определенных на $A \in B(S)$, инвариантных относительно G и удовлетворяющих условию $\mu(S)=1$. В частности, при $R=G$ и $gt=gg'$ для $t=g'$ группа G называется измеримой, если существует мера $\mu \in [G, G, G]$.

Если $X=X(R)$ — множество функций вида $x(t)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{A_i}(t)$, где $x_A(t)$ — характеристическая функция множества A и λ_i — вещественные числа, то полагаем $x(t) \prec y(t)$, если найдутся такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $g_1, \ldots, g_n$, $A_1, \ldots, A_n$, что $x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[x_{A_i} - x_{g_i A_i}\right] \leqslant y$.

С помощью теорем I и II доказываются предложения:

1. Пусть $N(G)=\{u\}$ — множество функций вида $u(t)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[x_{A_i}(t) - x_{g_i A_i}(t)\right]$. Для существования меры $\mu \in [R, S, G]$ необходимо и достаточно, чтобы не существовало соотношения вида $x_S(t) \prec u(t)$.

2. Если G — измеримая группа, то условие $x_S + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[x_S - x_{g_i S}\right] \leqslant 0$ является необходимым и достаточным для существования меры $\mu \in [R, S, G]$.

3. Для измеримости группы G необходимо и достаточно, чтобы для каждого нормального делителя $H \subset G$ существовала мера $\mu \in [G, H, G]$.

4. Если для каждой подгруппы H, порожденной конечным числом элементов, существует мера $\mu \in [G, H, G]$, то группа G измерима.

Доказаны также и другие аналогичные теоремы. В частности, получается теорема Неймана о том, что если группа G коммутативна или разрешима, то существует мера $\mu \in [R, R, G]$. В. И. Соболев

8033. Бимеры и их интегральные расширения. Морс (Bimeasures and their integral extensions. Morse Marston), Ann. mat. pura ed. appl., 1955, 39, 345—356 (англ.)

Краткий обзор результатов, полученных автором и Трансью в теории бимер.

Пусть E' и E'' — локально компактные топологические пространства. Пусть, далее, $R^{E'}$ ($R^{E''}$) — совокупность всех действительных функций, заданных на E' (E''). Пусть, наконец, K' (K'') — подпространство пространства $R^{E'}$ ($R^{E''}$), состоящее из непрерывных функций с компактным несущим множеством. Бимерой $\Lambda(u, v)$ на $E' \times E''$ называется действительная функция на $K' \times K''$ ($u \in K'$, $v \in K''$), обладающая свойствами: 1) $\Lambda(u, v)$ есть мера в смысле Бурбаки на E' при всяком фиксированном $v \in K''$, 2) $\Lambda(u, v)$ есть мера в смысле Бурбаки на E'' при всяком фиксированном $u \in K'$.

Бимера $\Lambda(u, v)$ называется положительной, если $\Lambda(u, v) \geqslant 0$ всякий раз, когда $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$. В общем случае бимера не представима в виде разности двух положительных бимер.

Если E' и E'' — компакты, то для бимеры $\Lambda(u, v)$ справедливо неравенство

$$|\Lambda(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\| \cdot M,$$

где M — положительная постоянная, $|u| = \max_{s \in E'} |u(s)|$, $\|v\| = \max_{t \in E''} |v(t)|$.

Указывается, что достаточно далеко продвинутая теория бимер имеет разнообразные применения в теории сходимости кратных рядов Фурье, в вопросе о представлении ограниченного линейного оператора, в теории вариации Фреше.

Далее строится Λ-интеграл как непрерывное расширение бимеры $\Lambda(u, v)$ и указываются свойства этого интеграла. Последний параграф работы содержит некоторые достаточные условия Λ-интегрируемости пар (x, y). Наиболее простые условия этого типа получаются при дополнительном требовании борелевской измеримости функций x и y.

Наряду с изложением теории бимер для сравнения приводятся соответствующие результаты из теории мер в смысле Бурбаки.

Доказательства не приводятся. Н. П. Купцов

8034. К общей теории динамических систем. Реб (Sur la théorie générale des systèmes dynamiques. Reeb G.), Ann. Inst. Fourier, 1955—1956, 6, 89—115 (франц.)

Попытка нового обобщения классической общей теории динамических систем. Автор оставляет в стороне понятие группы преобразований и кладет в основу разбиение основного пространства на траектории и его открытых подмножеств — на куски траекторий. Налагая на пространство и разбиение последовательные ограничения, он показывает, что на этом пути может быть установлен ряд важных понятий и фактов классической теории.

Работа состоит из трех глав. В первой главе определяется символ $[E, \rho]$ как пара, состоящая из топологического пространства E и определенного в нем отношения эквивалентности ρ. Классы эквивалентности называются траекториями. Уже этого определения оказывается достаточно для введения ряда содержательных понятий (инвариантное множество, минимальное множество, неразложимое множество, центр) и для установления простейших свойств этих понятий. Затем определяется символ (E, ρ) как такая пара $[E, \rho]$, в которой отношение ρ является открытым. Это условие эквивалентно требованию инвариантности замыкания любого инвариантного множества и приводит уже к большому числу привычных теорем, среди которых имеются и совсем нетривиальные; например, если E компактно и обладает

счетной базой, то всякое множество, неразложимое в (E, ρ), содержит всюду плотную траекторию. Во второй главе определяется основное для всей работы понятие обобщенной динамической системы (système dynamique généralisé — S. D. G).

Пусть E — топологическое пространство с базой $\mathfrak{V}$ и ρ — функция, относящая каждой окрестности $O \in \mathfrak{V}$ отношение эквивалентности $\rho(O)$, определенное в O, так что: 1) отношение $\rho(O)$ открыто; 2) классы эквивалентности, определяемые в O отношением $\rho(O)$, связны и локально связны; 3) эти классы замкнуты (относительно O); 4) если $O \in \mathfrak{V}$, $O' \in \mathfrak{V}$, $x \in O \cap O'$, то существует такое открытое множество V, что $x \in V \subset \bar{O} \cap \bar{O}'$ и отношения эквивалентности, индуцируемые в V отношениями $\rho(O)$ и $\rho(O')$, тождественны. При этих условиях пара $(\rho, \mathfrak{V})$ называется структурой S. D. G. на E. Если она, сверх того, не допускает расширения, т. е. если не существует такой пары $(\rho_1, \mathfrak{V}_1)$, также удовлетворяющей условиям 1)—4), что $\mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_1 \neq \mathfrak{V}$ и ρ_1 совпадает с ρ на $\mathfrak{V}$, то такая структура S. D. G. называется структурой S. D. G. Если $(\rho, \mathfrak{V})$ есть структура S. D. G. на E, то через ρ обозначается также самое мелкое из таких отношений эквивалентности ρ' на E, что для всякого $O \in \mathfrak{V}$ отношение $\rho(O)$ мельче отношения, индуцируемого отношением ρ' в O. Это отношение ρ открыто, так что с каждой структурой S. D. G на E ассоциируется символ $(E, \tilde{\rho})$. Соответствующие траектории называются траекториями структуры S. D. G и оказываются связными и локально связными. На основе этих определений вводятся и исследуются такие понятия, как рекуррентность, устойчивость по Пуассону, предельные множества и т. п.

Третья глава содержит примеры структур S. D. G, представляющих некоторые особенности.

Понятие структуры S. D. G. сопоставляется в работе с другими обобщениями понятия динамической системы, имеющимися в литературе. Подчеркивается, что структура S. D. G. есть локальная структура. Работами, подготовившими это понятие, автор считает работу Уитни (Whitney H., Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 145—147) и свою работу (Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Actualités scient. et industr., № 1183, Paris, Hermann, 1952). В. А. Рохлин

8035. **Обобщенные функции и их приложения в анализе. Шилов Г. Е.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 217—226

Обзор работ советских математиков по теории обобщенных функций и ее приложениям к задачам анализа и математической физики. Указаны ближайшие перспективы применения теории обобщенных функций в анализе. В. М. Борок

8036. ***m*-регулярные области. Лионс** (Ouverts *m*-réguliers. Lions J. L.), Rev. Unión. mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 103—116 (франц.)

Область Ω пространства R^n называется m-регулярной, если всякая функция из $L^2(\Omega)$, обладающая всеми производными (в смысле Соболева—Шварца) порядка m, принадлежащими $L^2(\Omega)$, обладает всеми производными порядка $k < m$. Даются достаточные условия m-регулярности неограниченной области. Рассматриваются условия справедливости в Ω неравенства:

$$\|u\|_k^2 \leqslant \eta \|u\|_m^2 + c(\eta)\|u\|_0^2; \quad k < m$$

(оценка норм низших производных через высшие). Указывается применение полученных результатов к изучению несамосопряженных эллиптических операторов. А. А. Дезин

8037. **Аналитические функции и преобразование Фурье распределений. Эренпрейс** (Analytic functions and the Fourier transform of distributions. Ehrenpreis Leon), Ann. Math., 1956, 63, № 1, 129—159 (англ.)

Пусть D — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$; $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, если $\varphi_n^{(k)}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равномерно на каждом компакте и все функции $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обращаются в нуль вне одного и того же компакта; $\tilde{D}$ — пространство преобразований Фурье функций $\varphi(x) \in D$ с естественно введенной топологией (см. например РЖМат, 1955, 5805); $\mathcal{E}$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\psi(x)$; $\psi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, если $\psi_n^{(k)}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ равномерно на любом компакте $(k = 0, 1, \ldots)$.

Если $f \in \tilde{D}$ $(\check{D})$, $T \in [\tilde{D}]'$ (D'), то $(T * f, \varphi) = (T, f * \varphi)$ для любой функции $\varphi \in \check{D}$ (D). Доказывается теорема: Для любой функции $f \in \tilde{D}$ и любого функционала $T \in [\tilde{D}]'$, $T * f$ есть целая функция экспоненциального типа, которая на действительной оси возрастает не быстрее некоторого полинома.

Каждая функция $f \in \mathcal{E}$ определяет непрерывное линейное преобразование пространства D в D $(D \to fD)$; поэтому пространство $\mathcal{E}$ можно топологизировать как множество непрерывных линейных преобразований $D \to D$. Доказывается, что эта топология совпадает с исходной.

Каждый функционал $T \in \mathcal{E}'$ также определяет непрерывное линейное преобразование пространства D в D $(D \to T * D)$. Имеет место обратная теорема: Если функционал $S \in D'$ таков, что $S * \varphi \in D$ для любой функции $\varphi \in D$, то $S \in \mathcal{E}'$.

В пространство $\mathcal{E}'$ также можно ввести топологию как в пространство линейных непрерывных преобразований $D \to D$. Доказывается совпадение этой топологии с исходной.

Пусть $[\hat{\mathcal{E}}]'$ — множество тех элементов $S \in [\tilde{D}]'$, для которых функционал Sf $((Sf, \varphi) = (S, \hat{f}\varphi)$; здесь $\varphi \in \tilde{D}$, $\hat{f} = \overline{f(-z)})$ есть функционал типа функции $F \in \tilde{D}$ для любой функции $f \in \tilde{D}$. Множество $[\hat{\mathcal{E}}]'$ можно рассматривать как множество непрерывных линейных преобразований $\tilde{D} \to D$ с соответствующей топологией. Доказываются теоремы:

1. Множество $[\hat{\mathcal{E}}]'$ состоит из тех элементов пространства $[D]'$, которые могут быть представлены как функционалы типа целой функции экспоненциального типа $F(z)$, удовлетворяющей условию $F(x) = O(1 + |x|^m)$ для некоторого $m \geqslant 0$.

2. Последовательность $\{F^j\}$ элементов пространства $[\hat{\mathcal{E}}]'$ сходится к нулю в $[\hat{\mathcal{E}}]'$ тогда и только тогда, когда а) существует такое число $a > 0$, что все функции F^j имеют экспоненциальный тип $< a$, б) для некоторого $m > 0$

$$\max_{x \in R} \frac{|F^j(x)|}{1 + |x|^m} \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

В. М. Борок

8038. **Новый класс символических функций: σ-функции. Леви** (Une nouvelle classe de fonctions symboliques: les σ-fonctions. Lévy Paul), Bull. sci. math., 1956, 80, mai—juin, 83—96 (франц.)

Пусть $\mu(V)$ — неотрицательная мера в евклидовом N-мерном пространстве R^N, принимающая конечные значения при любом конечном объеме V; $D(x)$ — плот-

ность этой меры в смысле теории обобщенных функций Шварца (РЖМат, 1957, 6506К); f_n (где индекс n может пробегать и несчетное множество значений) — совокупность вещественных измеримых функций в R^N с суммируемым относительно $\mu(V)$ квадратом. В таком случае σ-функциями называются символические функции вида

$$\sigma_n(x) = f_n(x)\sqrt{D(x)}, \qquad x \in R^N. \tag{1}$$

При этом имеют смысл интегралы вида

$$\Phi_n(V) = \int_V \sigma_n(x)\,\varphi_x\sqrt{dx}, \tag{2}$$

где V — некоторый объем в R^N, а φ_x — такая функция точки $x \in R^N$ со значениями из некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, что $\|\varphi_x\| = 1$, $(\varphi_x, \varphi_{x'}) = 0$ при $x \neq x'$; интеграл (2) определяется как «предел по форме» последовательности римановых сумм

$$S_n(V) = \sum f_n(x_\nu)\,\varphi_{x_\nu}\sqrt{\mu(\Delta x_\nu)} \qquad (\cup \Delta x_\nu = V), \tag{3}$$

т. е. как такой вектор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, для которого «функцию с ортогональными значениями» φ_x можно выбрать так, чтобы последовательность векторов (3) сходилась к нему в смысле сильной топологии. Разумеется, при фиксированном n условие «сходимости по форме» определяет лишь норму вектора $\Phi_n(V)$; однако при переменном n определяются также всевозможные скалярные произведения

$$(\Phi_n(V'),\ \Phi_m(V'')) = \int_V f_n(x)\,f_m(x)\,\mu(dx) \quad (V = V' \cap V''),$$

которые символически записываются в виде

$$(\Phi_n(V'),\ \Phi_m(V'')) = \int_V \sigma_n(x)\,\sigma_m(x)\,dx \quad (V = V' \cap V''). \tag{4}$$

Интегралы (2) представляют из себя векторы пространства $\mathfrak{H}$, заданные с точностью до движения всей совокупности этих векторов как целого.

Обычные функции с интегрируемым квадратом являются частным случаем σ-функций. В приложениях к теории вероятностей векторы пространства $\mathfrak{H}$ следует интерпретировать как случайные величины с конечной дисперсией, скалярное произведение — как математическое ожидание произведения соответствующих величин, а «сходимость по форме» — как сходимость по распределению.

Одна и та же σ-функция может многими различными способами записываться в виде (1); обсуждается некоторая другая форма записи, не обладающая этим недостатком. Указываются некоторые простые свойства σ-функций, включая свойство, аналогичное тому, которое для обыкновенных функций с интегрируемым квадратом составляет содержание теоремы Фишера—Рисса. Рассматривается разложение σ-функций на сумму трех компонент (первая из которых является обычной функцией), родственное разложению функции распределения на абсолютно непрерывную, сингулярную и «ступенчатую» компоненты; этому разложению отвечает разложение вектора $\Phi_n(V)$ в сумму трех взаимно ортогональных векторов. Указанное разложение приглагается к вопросу об ортогонализации последовательности σ-функций (в смысле скалярного произведения (4)). Рассматриваются некоторые обобщения понятия σ-функций (например, на случай комплексных функций $f_n(x)$), а также обобщения, связанные с применениями к теории вероятностей (к теории процессов с независимыми приращениями); при этом используются некоторые теоретико-вероятностные результаты, касающиеся безгранично делимых и устойчивых законов распределения.

А. М. Яглом

8039. **Линейные дифференциальные уравнения в распределениях.** Гейтс (Linear differential equation in distributions. Gates Leslie D., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 933—939 (англ.)

Рассматриваются уравнения

$$L[T] \equiv p_0 T^{(n)} + p_1 T^{(n-1)} + \ldots + p_n T = S,$$

где $p_i = p_i(x)$ $(i = 0, \ldots, n)$ — бесконечно дифференцируемые функции, S — заданное распределение (обобщенная функция) над пространством D Л. Шварца.

Пусть $\theta = \bar{L}[\psi]$, $\psi \in D$,

$$L[T]\cdot\psi = \left(\sum_{i=0}^{n} p_i T^{(n-i)}\right)\cdot\psi = \sum_{i=0}^{n} T^{(n-i)}\cdot(p_i\psi) =$$

$$= T\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(p_i\psi)^{(n-i)}\right) = T\cdot\bar{L}[\psi].$$

Доказывается теорема: Если 1) оператор $\bar{L}$ дает взаимно однозначное отображение пространства D на пространство D_θ (состоящее из функций $\theta = \bar{L}[\psi]$) и существует обратный оператор $\bar{L}^{-1}$, непрерывный в смысле сходимости в D, и 2) выполнение равенств $T_1\cdot\varphi = T_2\cdot\varphi = \ldots = T_m\cdot\varphi = 0$ является необходимым и достаточным условием того, что $\varphi \in D_\theta$, то дифференциальное уравнение $L[T] = S$ имеет решение

$$T\cdot\varphi = \sum_{i=1}^{m} C_i T_i\cdot\varphi + S\left(\bar{L}^{-1}\left[\varphi - \sum_{i=1}^{m} a_i\psi_i\right]\right),$$

где $a_i = T_i\cdot\varphi$, C_i — произвольные постоянные, ψ_i — основные функции, для которых $T_i\cdot\psi_k = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, m)$. Первое слагаемое правой части представляет собой линейную комбинацию решений однородного уравнения $L[T] = 0$, а второе слагаемое соответствует «частному интегралу» дифференциального уравнения с обычными функциями.

Разобраны некоторые примеры. Я. И. Житомирский

8040. **Квантовая механика в обобщенном гильбертовом пространстве.** Вачаспати (Quantum mechanics in generalized Hilbert space. Vachaspati), Kgl. danske vid. selskab, Mat.-fys. medd., 1956, 30, № 21, 28 pp. (англ.)

Сделана попытка обобщения гильбертова пространства квантовой механики по аналогии с развитием общей теории относительности из специальной. Автор находит, что векторы состояний ψ, $\bar{\psi}$ квантовой механики аналогичны четырехвектору скорости v^μ, и поэтому вводит еще величины χ, $\bar{\chi}$, соответствующие координатам x^μ и, следовательно, имеющие своими производными по времени соответственно величины ψ и $\bar{\psi}$.

Метрика η, с помощью которой строится плотность вероятности, предполагается зависящей от χ и $\bar{\chi}$. Унитарные преобразования обычной теории заменяются общими преобразованиями, зависящими от χ и $\bar{\chi}$.

Для введенного таким образом обобщенного пространства Гильберта развивается тензорное исчисление и устанавливаются уравнения движения, обобщающие уравнения Гейзенберга.

На этом пути получается нелинейная теория. Однако средние значения динамических переменных оказываются такими же, как и в старой теории; это приводит к выводу, что новая теория не дает отличных от имеющихся в старой теории результатов.

Из резюме автора

8041 К. **Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Ахиезер, Глазман** (Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Achieser N. I., Glasmann I. M. Berlin, Akad.-Verl., 1954, XIII+369 S., 28.00 DM) (нем.)

Перевод с русского издания (М., Гостехиздат, 1950).

8042 К. **Теория гильбертова пространства. Иосида** (ヒルベルト空間論. 吉田耕作. 共立全書. 東京 222 頁, 340 圓, Токио, 1953, 215 стр., 340 иен) (японск.)

Излагается теория операторов в гильбертовом пространстве (в том числе теория спектрального разложения, функции от операторов, теорема Фридрихса о расширении полуограниченного симметрического оператора) и некоторые ее применения.

В частности, рассматриваются положительно определенные и почти периодические функции на прямой, преобразование Фурье, разложение по собственным функциям дифференциального уравнения 2-го порядка, метод ортогональной проекции для гармонических функций (Weyl H., Duke Math. J., 1940, 7, 411—444), теория воспроизводящего (reproducing) ядра (Aronszajn N., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 337—404) и ядерная функция (Bergman S., The kernel function and conformal mapping, New York, 1950).

А. А. Конюшков, А. Г. Рябкин

См. также: 7785, 7786, 7787, 7882, 7891, 7894, 7898, 7941, 7964, 7987, 8189, 8228, 8253

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8043. **Возможное общее решение проблемы определения оптимальной динамической системы. Пугачев В. С.,** Автоматика и телемеханика, 1956, 17, № 7, 585—589 (рез. англ.)

Рассматривается задача о приближении в смысле среднего квадратичного случайной функции $Y(z)$ случайной функцией $AX(t)$, где $X(t)$ — заданная случайная функция, а A — оператор из некоторого класса R. В предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 5181) показано, что оператор $A \in R$, реализующий минимум средней квадратической ошибки, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{Re} M\left[\overline{AX(t)} - \overline{BX(t)}\right]\left[Y(z) - AX(t)\right] = 0,$$

где M — символ математического ожидания, B — произвольный оператор из класса R. Отсюда следует, что возможным общим решением для оператора A является условное математическое ожидание

$$AX(t) = M_z[Y(z) \mid X(t)].$$

Однако эта формула определяет оптимальный оператор лишь в случае, если получающийся оператор действительно принадлежит классу R (что верно, например, если R — класс всех возможных операторов).

Находится явное выражение для оптимального оператора с помощью канонического разложения

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{\nu} V_\nu u_\nu(t),$$

где $u_\nu(t)$ — неслучайные функции, а $V_\nu = \Omega^{(\nu)}(X - m_x)$ — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями ($\Omega^{(\nu)}$ — линейные функционалы, соответствующие каноническому разложению). В случае, когда случайные функции X, Y нормальны, оптимальный оператор (в классе всех возможных операторов) оказывается линейным с добавочным неслучайным слагаемым, исправляющим смещение математического ожидания. При произвольных случайных функциях X, Y находится оптимальный оператор A из класса R неоднородных линейных операторов, причем получающийся результат согласуется с предыдущим результатом для нормальных X, Y.

А. С. Монин

8044. **Одна предельная теорема для потоков однородных событий. Ососков Г. А.,** Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 2, 274—282 (рез. нем.)

Рассматривается последовательность серий потоков

$$x_{11}(t),$$

$$x_{21}(t),\ x_{22}(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n1}(t),\ x_{n2}(t),\ \ldots,\ x_{nn}(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

не зависимых в каждой серии, стационарных и ординарных (РЖМат, 1957, 5032), где $x_{nr}(t)$ — число «вызовов» r-го потока n-й серии за промежуток времени $(0, t)$. Пусть $\lambda_{nr} = \lim_{t\to 0} P(x_{nr}(t) > 0)/t$ — «параметр» потока $x_{nr}(t)$, $\varphi_{nr}(t)$ — его функция Пальма, $X_n(t) = x_{n1}(t) + x_{n2}(t) + \ldots + x_{nn}(t)$ (суммарный поток), $\Lambda = \lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nn} = \text{const}$.

Теорема. Для того чтобы суммарный поток $X_n(t)$ при $n \to \infty$ стремился к процессу Пуассона с параметром Λ достаточно выполнения условия:

$$\frac{1}{\Lambda}\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}\varphi_{nr}(t) \to 1 \quad (n \to \infty); \tag{1}$$

если параметры λ_{nr} равномерно бесконечно малы при $n \to \infty$, то условие (1) является и необходимым.

Доказательство основывается на результатах А. Я. Хинчина (РЖМат, 1957, 5032). А. А. Бобров

8045. **Единая форма условий притяжения к устойчивым законам. Саковович Г. П.,** Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 3, 357—361 (рез. нем.)

Необходимые и достаточные условия притяжения к устойчивым законам были найдены в одномерном случае, если показатель устойчивого закона $\alpha = 2$, А. Я. Хинчиным, Феллером и Леви, а для $0 < \alpha < 2$ — Б. В. Гнеденко и Дёблиным, в многомерном случае — Е. Л. Рвачевой. Автор формулирует и доказывает условие в форме, пригодной сразу для $0 < \alpha \leqslant 2$. В одномерном случае закон распределения $F(X)$ случайной величины X притягивается к устой-

чивому закону тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2F(-R)}{\int_{-R}^{R}X^2dF(X)} \text{ и } \lim_{R\to+\infty}\frac{R^2[1-F(R)]}{\int_{-R}^{R}X^2dF(X)}.$$

При этом сумма этих пределов $\mathfrak{A}$ и α связана соотношением $\mathfrak{A}=(2-\alpha)/\alpha$. Для случая $\alpha=0$ это условие также выполняется.

Аналогичное условие доказывается и для многомерного случая. В. Г. Винокуров

8046. **Марковские процессы и полугруппы операторов.** Дынкин Е. Б., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 25—37 (рез. англ.)

Исследуются соотношения между различными полугруппами операторов и различными инфинитезимальными операторами, соответствующими марковскому процессу. Устанавливаются общие условия, при которых марковский процесс однозначно определяется своим инфинитезимальным оператором.

Точнее, имеется полугруппа U_t линейных операторов над банаховым пространством L такая, что $\|U_t\|\leqslant 1$, и сопряженная полугруппа T_t, действующая в пространстве $B=L^*$ всех линейных функционалов, на L. Для нее можно строить инфинитезимальный оператор, отправляясь либо от сильной, либо от слабой сходимости в пространстве B. Изучается связь между этими операторами, даются необходимые и достаточные условия, при которых эти операторы определяют полугруппу U_t.

Доказывается, что инфинитезимальный оператор определяет процесс, если процесс измеримый и стохастически непрерывный. В. А. Волконский

8047. **Добавление к теории характеристических функций случайных величин.** Леффель (Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen. Loeffel H.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1956, 56, № 2, 337—384 (нем.)

При некоторых естественных условиях доказывается теорема: Если при каждом v (за исключением, быть может, счетного множества значений) $\varphi(t,\alpha)$ есть характеристическая функция и $V(\alpha)$ — неубывающая, непрерывная слева, ограниченная функция, то функция

$$\Phi(t)=\frac{1}{V(b)-V(a)}\int_a^b\varphi(t,\alpha)\,dV(\alpha)$$

является характеристической. При этом $b\leqslant\infty$.

Отсюда в качестве следствия получается следующий результат Бохнера: функция $H(z)=\exp(-z^2g(z))$, где $g(z)=\int_{-\infty}^{\infty}(z^2-\alpha^2)^{-1}\,dV(\alpha)$, является характеристической.

Далее рассматривается случай $V(\alpha)=\alpha^p$. При $p=1$ получается класс характеристических функций одновершинных распределений, введенный в рассмотрение А. Я. Хинчиным еще в 1938 г. (Изв. Н.-и. ин-та матем.-механ. Томск. ун-та, 1938, 2, № 2, 1—7). Автор называет эти функции и соответствующее интегральное преобразование именем Жиро, рассмотревшим это преобразование в 1954 г. (РЖМат, 1955, 2775). Автор доказывает, что если функция $F(x)$ не одновершинна, то существует такое $a>0$, что при любом $p>a$ функции распределения с характеристической функцией $\Phi(t)=\int_0^1 f(za)\,da^p$ будут не одновершинны.

Б. В. Гнеденко

8048. **Об усиленном законе больших чисел.** Цурими (On the strong law of large numbers. Tsurumi Shigeru), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 3, 166—170 (англ.)

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных переменных, для которой существует такая постоянная K, что для любого целого числа m и для любых действительных чисел $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ (включая $-\infty$ и $+\infty$) выполняется соотношение

$$\limsup_n\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P(a_1\leqslant X_{1+i}<b_1,\ \ldots,\ a_m\leqslant X_{m+i}<b_m)\leqslant KP(a_1\leqslant X_1<b_1,\ \ldots,\ a_m\leqslant X_m<b_m). \quad (1)$$

Доказывается эквивалентность следующих свойств:

(α) Для некоторых борелевских множеств $A_1, A_2, \ldots$, где $A_i\cap A_j\neq 0$ $(i\neq j)$ и $U_{i=1}^{\infty}A_i=[0,\infty]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|X_n|\subset A_n}|X_n|\,dP<\infty.$$

(β) Для некоторой постоянной c

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=c\right)=1.$$

В частности, если X_n одинаково распределены, соотношение (1) выполняется и эквивалентность свойств (α) и (β) сводится к теореме Колмогорова (Kolmogorov A. N., Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933) об усиленном законе больших чисел. M. Fisz

8049. **Выпуклые функции Пойа.** Дюге, Жиро (Fonctions convexes de Pólya. Dugué D., Girault M.), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1955, 4, 3—10 (франц.)

Пусть $0<\alpha\leqslant 1$. Если $\varphi(x)$ — действительная характеристическая функция, выпуклая при $x>0$ и такая, что $1-\varphi(x)+x\alpha^{-1}\varphi'_-(x)$ возрастает от 0 до 1 при x, изменяющемся от 0 до ∞, то случайная величина с характеристической функцией $\varphi(x)$ есть произведение случайной величины с характеристической функцией, равной $1-|t|^{\alpha}$ для $|t|\leqslant 1$ и равной 0 при $t>1$, и другой величины, не зависящей от первой. K. L. Chung

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 47.

8050. **Предельные теоремы для случайных процессов.** Скороход А. В., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 3, 289—319 (рез. англ.)

Исследуется вопрос о сходимости функций от случайных процессов: определяется некоторый класс S топологий в пространстве K_X функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$, принимающих значения из полного метрического сепарабельного пространства X, имеющих в каждой точке предел слева и непрерывных справа.

Рассматривается последовательность процессов $\xi_n(t)$, принадлежащих с вероятностью 1 K_X и таких, что конечномерное распределение $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \ldots, \xi_n(t_k)$ сходится к конечномерному распределению $\xi_0(t_1), \xi_0(t_2), \ldots, \xi_0(t_k)$ для всех k и $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Даются некоторые необходимые и достаточные условия, при соблюдении которых для функции f, непрерывной в какой-либо из топологий класса S, $f(\xi_n(t))$ сходится к $f(\xi_0(t))$.

Доказана также теорема: Распределение $f(\xi_n(t))$ сходится к распределению $f(\xi_0(t))$ для всех f, непрерывных в какой-либо топологии класса S тогда и

только тогда, когда а) конечномерное распределение $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \ldots, \xi_n(t_k)$, сходится к конечномерному распределению $\xi_0(t_1), \xi_0(t_2), \ldots, \xi_0(t_k)$ для всех k и $t_1, t_2, \ldots, t_k$ из некоторого множества N, плотного в $[0, 1]$; б) для всякого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{c\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P\{\Delta_S(c, \xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0$ (Δ_S определяется в работе в зависимости от топологии). В. П. Швальб

8051. О сходимости А. В. Скорохода. Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 2, 239—247 (рез. англ.)

Рассматривается множество D функций $f(t)$, имеющих только разрывы первого рода и описывающих некоторые скачкообразные процессы при пробегании переменным t «фазового пространства» X.

Для детального исследования подобных процессов вводится в D специальная топология, основным в которой являются предложенное А. В. Скороходом понятие особой сходимости, последовательности $f_n(t)$ (S-сходимости). Автор устанавливает более общее определение S-сходимости, вводя при этом понятие соответствующего «расстояния» $s(f, g)$, благодаря чему множество D делается метрическим.

Далее автор вводит понятие особых точечно-множественных графиков функций $f \in D$ и соответствующих им D-кривых, которые позволяют описывать процессы более сложные, сравнительно с простыми скачками. В. В. Добронравов

8052. Об условиях центральной предельной теоремы для неоднородных цепей Маркова. Добрушин Р. Л., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 6, 1004—1006

Заметка посвящена дальнейшему развитию результатов, приведенных в заметке автора (РЖМат, 1956, 3186) относительно предельного распределения сумм $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{in}$, где ξ_{in} — случайные величины, связанные в неоднородную цепь Маркова. Вводится новая величина, характеризующая эргодические свойства неоднородных цепей Маркова, вместо вводимого ранее коэффициента эргодичности, с помощью которой обобщаются результаты первой заметки. Дается несколько новых критериев асимптотической нормальности сумм ξ_n. В. А. Волконский

8053. Задача, связанная с особой марковской цепью. Силви (A problem associated with a particular Markov chain. Silvey Samuel D.), Proc. Glasgow. Math. Assoc., 1954, 2, № 2, 100—104 (англ.)

Имеется однородное по времени блуждание по целочисленным точкам отрезка $(-r, r)$ с отражающими экранами в точках $\pm r$ и матрицей переходных вероятностей

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассматривается математическое ожидание S_t расстояния от центра отрезка до положения в момент t частицы, вышедшей из точки 1. Ищется асимптотическое поведение времени, за которое это математическое ожидание уменьшится вдвое (среднее время половины пробега). Сначала вычисляется матрица P^t вероятностей перехода за время t с помощью приведения матрицы P к диагональному виду, затем находится асимптотика S_t при $t \sim \text{const}$, $r \to \infty$. Окончательно получается, что среднее время половины пробега асимптотически равно $2[(r + 1/2)\Phi(1/8)]^2$, где $\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2}dx$. В. А. Волконский

8054. Асимптотическое разложение для неоднородных цепей Маркова. Статулявичус В. А., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 2, 206

Изучается неоднородная цепь Маркова с конечным числом $s > 1$ возможных состояний $e_1, \ldots, e_s$ и вероятностями перехода $p_{\alpha\beta}^{(k)}$ из состояния e_α в $(k-1)$-м шагу в состояние e_β в k-м шагу. Пусть случайная величина $\zeta_n^{(\alpha)}$ означает число попаданий в состояние e_α за первые n шагов. Тогда для вероятности $P_\gamma(m)$ случайному вектору $\zeta_n = (\zeta_n^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(s)})$ принять значение $m = (m_1, \ldots, m_s)$ при условии, что e_γ есть начальное состояние, справедлива следующая теорема:

Пусть соблюдены условия:

A. $p_{\alpha\beta}^{(l)} \geqslant \lambda p_{\alpha\beta}^{(k)}$ для любых α, β, k, l, где постоянная $\lambda > 0$.

B. Множество состояний цепи образует один существенный класс.

C. Ранг цепи r равен s.

Тогда для любого γ и целого $k > 0$ равномерно по всем $(m_1, \ldots, m_s)$ будет

$$\sqrt{D_n^{(1)} \ldots D_n^{(s-1)}}\, P_\gamma(m) = g_{s-1}(x) + \sum_{j=1}^{k} n^{-j/2} P_{\gamma j}\left(-\frac{\partial}{\partial x} g(x)\right) + O\left(\frac{1}{n^{(k+1)/2}}\right). \quad (1)$$

Здесь

$$g_{s-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{s-1}\Delta_n}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q_n^{-1}(x)\right]$$

— плотность $(s-1)$-мерного нормального распределения

$$x = \left(\frac{m_1 - E_n^{(1)}}{\sqrt{D_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{m_{s-1} - E_n^{(s-1)}}{\sqrt{D_n^{(s-1)}}}\right);$$

$E_n^{(\alpha)} \asymp n$, $D_n^{(\alpha)} \asymp n$; квадратичная форма $Q_n(x) = Q_n(x_1, \ldots, x_{s-1})$ положительно-определенная; Δ_n — определитель этой формы. $P_{\gamma j}(it)$ является многочленом степени не выше $3j$ от компонент вектора $it = (it_1, \ldots, it_{s-1})$. Коэффициенты многочлена действительны, зависят от γ и n, но равномерно ограничены по всем n. $P_{\gamma j}\left(-\frac{\partial}{\partial x} g_{s-1}(x)\right)$ означает, что вместо степеней $-it_\alpha$ берутся производные от $g_{s-1}(x)$ по соответствующей компоненте x_α.

Если условие C нарушено, но $r > 1$, то в равенстве (1) s следует заменить на r.

8055. О «сравнительной частоте» события. Канеллос (On the «comparative frequency» of an event. Kanellos S. G.), Bull. Soc. Math. Grèce, 1953, 27, 25—67 (англ.)

8056. Некоторые вероятностные законы и стохастические процессы, которые приводят к распределениям типа Лапласа—Стилтьеса. Риос (Some probability laws and stochastic processes which reduce to a general Laplace—Stieltjes type. Rios S.), Trabajos Estadistica, 1953, 4, 3—10 (исп.; рез. англ.)

8057. Применение преобразований Ханкеля в теории вероятностей. Лорд (Applications of Hankel transforms in the theory of probability. Lord Reginald Douglas), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 295—296 (англ.)

8058. **Обобщение одной теоремы Бореля. Франкс** (Généralisation d'un théorème de Borel. Franckx E.), Trabajos Estadistica, 1953, 4, 369—371 (франц.; рез. исп.)

8059. **Обобщение закона распределения вероятности Коши. Гулотта** (Sulla estensione della legge di probabilità di Cauchy. Gulotta Beniamino), Giorn. Ist. Ital. Attuari, 1954 (1953), 16, 38—50 (итал.)

8060. **Об определении вероятности. Паппас** (Upon the definition of probability. Pappas A. J., Επι του οριςμου της πιθανοτητος. Παππα Αλεξανδρου Ι). Σπουδαί Οικονομικαι κοινονικαι τεχνικαι, Спудэ икономикэ, киноникэ, техникэ, 1956, 6, № 7—8, 1—6 (греч.)

8061 К. **Исследование в области анализа стационарных временных рядов. Уолд** (A study in the analysis of stationary time series. Wold Herman, 2 (ed.), Stockholm. Almqvist and Wiksell. 1954, 236 pp., 38 Sw. kr). (англ.)

Первое издание этой книги вышло в 1938 г. и сыграло в свое время значительную роль в развитии теории стационарных случайных процессов (в книге рассматривается лишь случай процессов с дискретным временем). В новом издании в основной текст книги внесено только несколько незначительных изменений, причем автор специально оговаривает, что все эти изменения используют лишь материалы по теории случайных процессов, который был известен к 1938 г. Помимо того, в новом издании добавлено два небольших дополнения к книге. Первое из них (объемом около 5 страниц) содержит 17 примечаний к основному тексту, основывающихся, как правило, на новом материале, появившемся после выхода в свет первого издания. Второе дополнение (объемом около 30 страниц) написано Уитлом (Whittle P.) и содержит краткий обзор вопросов, получивших значительное развитие за последнее время: теории линейного экстраполирования стационарных процессов с дискретным спектром (по работам А. Н. Колмогорова) и методов статистического анализа выборочных последовательностей таких процессов (теория оценок параметров стационарных процессов, критерии согласия для этих процессов, проверка относящихся к ним гипотез; здесь в основу положены работы автора дополнения, но затронуто также и большое количество результатов, полученных другими авторами). К дополнениям приложен также список дополнительной литературы, содержащий 65 названий. А. М. Яглом

8062 К. **Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Гнеденко, Колмогоров** (Limit distributions for sums of independent random variables. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Translated and annotated by K. L. Chung. With an Appendix by J. L. Doob. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge, Mass., 1954, IX+264 pp. 7.50 doll.) (англ.)

Перевод с русского (М., Гостехиздат, 1949).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8063. **Общий метод для аппроксимации решения уравнения правдоподобия. Лоли** (A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. Lawley D. N.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 295—303 (англ.)

Рассматривается логарифм функции правдоподобия L для выборки объема n, зависящий от $p+q$ независимых параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+q}$. Предполагается равномерная непрерывность $\frac{\partial L}{\partial \theta_i}$, $i=1, 2, \ldots, p+q$ и что $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i^2} = O(n)$. Обсуждается гипотеза H_0, что $\theta_{p+1}, \theta_{p+2}, \ldots, \theta_{p+q}$ имеют определенные значения $\theta^0_{p+1}, \theta^0_{p+2}, \ldots, \theta^0_{p+q}$, в то время как значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ неизвестны. Вводится обозначение: $L^{(k)}$ — результат максимизирования L по отношению к $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ и подстановки действительных значений остальных параметров. Показано, что $2M\{L^{(p+q)} - L^{(p)}\} = q + \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p + O(n^{-2})$ и дано явное выражение для ε_k.

Основным результатом работы является доказательство того, что статистика $2\{1-q^{-1}(\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p)\}(L^{(p+q)}-L^{(p)})$ с точностью до величин порядка n^{-2} имеет те же моменты, что χ^2 с q степенями свободы.

Приведены примеры, связанные с нормальным распределением. В. П. Швальб

8064. **Статистический контроль. Манайра** (Il controllo statistico. Manaira Mario), Riv. mecc., 1956, 7, № 143, 19—27 (итал.)

Попытка установить экономически наиболее выгодный с точки зрения приемщика объем выборки при простом статистическом приемочном контроле. Сначала фиксируются вероятности α и β того, что принимаемая партия содержит более чем $p_1\%$ бракованных изделий и что отвергнутая партия содержит менее $p_2\%$ брака, которые автор предлагает принимать равными 0,05. Далее выбирается желаемое значение отношения p_1/p_2. По этим данным с помощью номограммы, содержащейся в книге Каве (Cavé, Le contrôle statistique des fabrications, 1953, изд. Eyrolles, табл. 6), находится соответствующее значение k числа бракованных изделий в выборке, при превышении которого партия бракуется, и число $v=0{,}01\ p_1 x$, где x — объем выборки (эти числа зависят только от α, β и p_1/p_2, но не от x; по-видимому, для составления номограммы используется закон распределения Пуассона). После этого объем выборки x определяется так, чтобы сделать наименьшей сумму $N(v/x)P + P'x$ максимального ожидаемого убытка от наличия бракованных изделий в принятой партии и стоимости выборочных испытаний, что приводит к формуле $x=\sqrt{Nvq}$ (здесь N — число изделий во всей партии, P — убыток от наличия каждого бракованного изделия в партии, P' — стоимость испытания одного изделия, $q=P/P'$). Что касается выбора величины отношения p_1/p_2 (или, что то же, выбора контрольного числа k), то он зависит от соглашения между приемщиком и поставщиком, однако его нельзя обусловить уравниванием риска того и другого, так как риск поставщика даже при весьма больших значениях числа k, оказывается по сумме убытка значительно превосходящим риск приемщика.

Примечание референта. Подход автора к решению настоящей задачи представляется референту неправильным: нельзя фиксировать отношение p_1/p_2, так как получающийся условный минимум не соответствует смыслу задачи. М. Ф. Бокштейн

8065. **Об оценке биномиальных отношений. Анском** (On estimating binomial response relations. Anscombe F. J.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 461—464 (англ.)

Рассматривается задача из области токсикологии. Исследуется группа объектов, подвергаемых действию k различных величин x_i ($i=1, 2, \ldots, k$) («доз»). Из n_i предметов, подвергнутых действию дозы x_i, замечается эффект действия в r_i случаях. Предполагается, что r_i имеют независимые биномиальные распределения с параметрами n_i и P_i ($=1-Q_i$), где P_i — заданная функция требующих оценки неизвестных параметров α и β.

Рассматривается логистический закон

$$P_i = [1 + \exp(-\alpha - \beta x_i)]^{-1},$$

$$\ln(P_i/Q_i) = \alpha + \beta x_i$$

и тригонометрический закон

$$P = \sin^2(\alpha + \beta x), \text{ если } 0 < \alpha + \beta x < \frac{1}{2}\pi,$$

$P = 0$ во всех остальных случаях.

Оценка производится с помощью принципа максимума правдоподобия и методом «минимума логит χ^2».

А. М. Бендерский

8066. **О распределении наибольшего или наименьшего корня матрицы в многомерном анализе. Пиллай** (On the distribution of the largest or the smallest root of a matrix in multivariate analysis. Pillai K. C. S.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 122—127 (англ.)

Рассматривается распределение экстремальных характеристических корней матриц в многомерном анализе. С подобными задачами приходится сталкиваться при проверке статистических гипотез и при оценке доверительных интервалов для многомерных случайных величин. В частности, характерны следующие задачи: 1) проверка гипотезы о равенстве дисперсий матриц двух p-мерных нормальных распределений, 2) проверка гипотезы о равенстве p-мерных средних векторов lp-мерного нормального распределения, 3) проверка независимости p- и q-мерных векторов в $(p+q)$-мерном нормальном распределении.

Автор приводит кумулятивную функцию распределения наибольшего корня в случае, когда число корней не превышает 5. Для случая двух корней статья содержит таблицы верхних процентных точек распределения наибольшего корня, соответствующих вероятностям 5% и 1%.

Приведенные численные данные свидетельствуют о высокой степени точности предлагаемых приближенных формул, основанных на применении неполной бэта-функции и гипергеометрического ряда.

А. М. Бендерский

8067. **Оценка максимального правдоподобия для упорядоченных вероятностей. Эден** (Maximum likelihood estimation of ordered probabilities. Eeden Constance van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 4, 444—455; Indagationes math., 1956, 18, № 4, 444—455 (англ.)

Работа касается вопросов, связанных с оценками максимального правдоподобия частично или вполне упорядоченных вероятностей.

Рассматривается k независимых серий независимых испытаний, причем результатом каждого испытания является успех или неудача. i-я серия состоит из n_i испытаний с a_i успехами и $b_i = n_i - a_i$ неудачами; π_i есть (неизвестная) вероятность успеха для каждого испытания i-й серии $(i = 1, 2, \ldots, k)$, при этом $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_{ij}(\pi_i - \pi_j) \leqslant 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k), \qquad (1)$$

где 1) $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, 2) $\alpha_{ij} = 0$ для m_0 пар значений (i, j) с $i < j$, 3) $\alpha_{ij} = 1$ для m_1 пар значений (i, j) с $i < j$, $m_0 + m_1 = \binom{k}{2}$, $m_1 \geqslant 1$, и для $i < h < j$ $\alpha_{ij} = 1$, если $\alpha_{ih} = \alpha_{hj} = 1$ (транзитивность). Частично или вполне упорядоченные вероятности могут быть всегда занумерованы таким образом, что они будут удовлетворять неравенствам (1).

В последующих разделах работы приводятся специальные теоремы и описываются методы, посредством которых могут быть найдены оценки максимального правдоподобия для $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$, т. е. значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$, обращающие в максимум выражение

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \{a_i \lg x_i + b_i \lg(1 - x_i)\}$$

в области

$$D: \begin{cases} \alpha_{ij}(x_i - x_j) \leqslant 0 \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Приводятся различные примеры, иллюстрирующие описанные методы.

Б. М. Клосс

8068. **Непараметрические критерии двух выборок и метод таблиц 2×2. Эден** (Verdelingsvrije toetsen voor twee steekproeven en de methode der 2×2-tabel. Eeden Constance van), Statist. neerl., 1956, 10, № 3—4, 157—162 (гол.; рез. англ.)

Метод таблицы 2×2 может быть использован для испытания гипотезы, что две вероятности p_A и p_B являются равными. Этот критерий основывается на двух независимых сериях A и B независимых испытаний, каждое испытание дает успех или неудачу с вероятностями p_A и $q_A = 1 - p_A$ для серии A, p_B и $q_B = 1 - p_B$ для серии B.

Каждое из этих испытаний можно рассматривать как наблюдение случайной величины, которая может принимать два «значения»: успех и неудача, обозначаемые двумя символами, например z_1 и z_2. Тогда две серии A и B являются двумя независимыми сериями наблюдений двух случайных величин x (для A) и y (для B), принимающие величину z_1 с вероятностью p_A (соответственно p_B) и величину z_2 с вероятностью q_A (соответственно q_B). Гипотеза $p_A = p_B$ тогда идентична гипотезе, что x и y обладают одним и тем же распределением вероятностей. Эта гипотеза может быть испытана посредством непараметрического критерия для двух выборок. Рассматривается некоторый класс таких критериев. Он содержит в себе критерии Питмана, Вилкоксона, Терри, Ван-дер-Вардена. Главный результат статьи: показывается, что каждый критерий, принадлежащий этому классу, когда применяется к сериям наблюдений, упомянутых выше, идентичен методу таблицы 2×2. Резюме автора

8069. **Точные линейные последовательные критерии для среднего значения нормального распределения. Тейлор** (Exact linear sequential tests for the mean of a normal distribution. Taylor J.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 452—455 (англ.)

Для значений нормально распределенной случайной величины со средним θ и стандартным отклонением 1 рассматриваются последовательные критерии отношения вероятностей при паре конкурирующих гипотез H_0: $\theta = \theta_0$, H_1: $\theta = \theta_1$ с ошибками первого и второго рода α и β.

Разбирается метод Пейджа улучшенной аппроксимации к оперативным характеристикам. Автор излагает метод, основанный на случайных выборках, для получения критериев, для которых ошибки первого и второго рода обе равны $\alpha = \beta = 0{,}05$. Рассматривается также схема усечений.

Б. М. Клосс

8070. **При применении метода последовательного анализа к t-распределению решение достигается с вероятностью единица. Дейвид, Краскал** (The WAGR sequential t-test reaches a decision with probability one. David Herbert T., Kruskal William H.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 797—805 (англ.)

Рассматривается последовательность взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых распределена нормально (μ, σ^2). Задаются числа U, K_1, K_0, α, β такие, что $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $\alpha+\beta<1$, $K_1<K_0$. Для каждого n определяются следующие случайные величины:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (U - X_i) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} (U - X_i)^2 \right)^{1/2},$$

$$l_n(u_n) = \frac{1}{2}(n - u_n^2)(K_0^2 - K_1^2) + \ln \frac{Hh_{n-1}(-u_n K_1)}{Hh_{n-1}(-u_n K_0)},$$

где

$$Hh_\nu(x) = \int_0^\infty \frac{z^\nu}{\nu!} \exp\left[-\frac{1}{2}(z+x)^2\right] dz.$$

Исследуется вопрос о существовании конечного n, для которого неравенство $\ln[\beta/(1-\alpha)] \leqslant l_n(u_n) \leqslant \ln[(1-\beta)/\alpha]$ нарушается впервые. Основным результатом работы является доказательство того, что с вероятностью единица такое n существует.

Описанный метод (WAGR = test) может быть использован для определения по выборке отношения μ/σ при двух конкурирующих гипотезах H_0 и H_1, где H_0: $\{U - \mu/\sigma = K_0\}$, H_1: $\{U - \mu/\sigma = K_1\}$.

В. П. Швальб

8071. Заметка о подвижных рангах. Дейвид (A note on moving ranges. David H. S.), Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 512—515 (англ.)

По результатам наблюдений

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \qquad (1)$$

строится i-я «подвижная» выборка объема n:

$$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}.$$

Изучаются связи между рангами (максимумами, минимумами и размахами) подвижных выборок, имеющих общие группы наблюдений. Результаты могут быть использованы в вопросах контроля. Например, статистика

$$\omega_1 = \frac{1}{N-n+1} \sum_{i=1}^{N-n+1} w_i$$

(где w_i — размах i-й подвижной выборки объема n ряда (1)) является удобной оценкой дисперсии ряда (1). Приведена таблица эффективности этой оценки при различных N и n.

В. С. Королюк

8072. Двухвыборочная процедура в совокупных оценках. Хилл (Two-sample procedures in simultaneous estimation. Healy W. C., Jr.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 687—702 (англ.)

Изучаются двухвыборочные процедуры типа Штейна (РЖМат, 1955, 3322) для некоторых проблем совокупных оценок. Указывается конструкция совокупных доверительных интервалов предписанной длины или длин и коэффициента доверия $1-\alpha$: 1) для всех нормализованных линейных функций от средних, 2) для всех разностей между средними и 3) для средних независимых нормальных популяций с общей неизвестной дисперсией. Совокупные доверительные интервалы длины l с коэффициентами доверия, не меньшими $1-\alpha$, конструируются для всех нормализованных линейных функций от средних в многомерной нормальной популяции общего вида. Проблемы аналогичного типа для единичных выборок были исследованы Тьюки, Шеффе и Босом и Роем (РЖМат, 1954, 5693; 1955, 3316). Точно так же строится доверительная область заданного диаметра или объема и доверительного коэффициента для среднего вектора для многомерной нормальной совокупности общего типа. В процедуру входят лишь известные и табулированные распределения. Описываются приложения в области дисперсионного анализа. По резюме автора

8073. Оценка среднего, дисперсии и процентных точек распределения совокупности по данным усеченной выборки. Уолш (Estimating population mean, variance, and percentage points from truncated data. Walsh John E.), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 1—2, 47—58 (англ.)

Пусть $y(1) < y(2) < \ldots < y(n)$ — упорядоченная выборка определенного объема из статистической совокупности с непрерывным распределением. Из эксперимента известны лишь следующие данные: $y(n_1+1)$, $y(n_1+2)$, . . ., $y(n-n_2)$; остальные $y(1)$, $y(2)$, . . ., $y(n_1)$ и $y(n-n_2+1)$, . . ., $y(n)$ исключаются из выборки, в результате чего выборка становится усеченной. Есть много практических задач, в которых имеет место такая схема усечения.

Для оценки среднего, дисперсии и процентных точек (квантилей), отвечающих заданному уровню β в тех случаях, когда β находится вне интервала n_1/n, $1-n_2/n$, автор предполагает, что функцию исследуемого распределения можно представить первыми шестью членами ряда Эджеворта

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-A}{B}\right) + C\Phi^{(4)}\left(\frac{x-A}{B}\right) + D\Phi^{(6)}\left(\frac{x-A}{B}\right) + \ldots,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2} dy, \quad \Phi^{(u)}(z) = \frac{d^u}{dz^u}\Phi(z).$$

С параметрами A, B, C, D которые последовательно подбираются таким образом, чтобы функция $F(x)$ наименьше уклонялась от полигона накопленных частостей в смысле принципа наименьших квадратов.

A принимается за среднее совокупности, B^2 — за дисперсию. По мнению референта, экстраполяция функции $F(x)$ за интервал n_1/n, $1-n_2/n$ не является достаточно обоснованной. А. М. Бендерский

8074. Заметки о смещении в оценках. Кенуй (Notes on bias in estimation. Quenouille M. H.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 353—360 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые результаты измерений величины x с заданным распределением вероятностей; оценивается неизвестный параметр этого распределения θ. Для оценки θ принимается некоторая функция $t_n = t_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таким образом, что случайные величины $k_j = k_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ суть несмещенные оценки куммулянтов $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m$. Предполагается, что m не зависит от n, все куммулянты конечны, функция t_n разложима в ряд Тэйлора и дает состоятельную оценку, т. е. t_n сходится по вероятности к θ при $n \to \infty$. Вообще t_n может быть смещенной оценкой в том смысле, что математическое ожидание $E(t_n - \theta) \neq 0$.

Автор предлагает приближенный метод вычисления несмещенной оценки t_n', основываясь на разложении смещения в степенной ряд

$$E(t_n - \theta) = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots$$

Тогда оценка $t'_n = nt_n - (n-1)t_{n-1}$ будет иметь смещение порядка n^{-2},

$$t''_n = [n^2 t'_n - (n-1)^2 t^2_{n-1}]/[n^2 - (n-1)^2]$$

будет иметь смещение порядка n^{-3} и т. д.

Метод обобщается на случай связанных результатов измерений и приводятся примеры его приложения. А. М. Бендерский

8075. **Обобщение теоремы Гнеденко—Королюка на три выборки при двух односторонних границах. Озолс** (Gnedenko—Koroluka teoremas vispārinājúms uz trīs izlasēm pie divām vienpusīgām robežām. Ozols V.), Latv. PSR zinātnu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1956, № 10, 141—152 (латыш., рез. русск.)

Критерий Колмогорова—Смирнова до сих пор рассматривался как критерий оценки согласия только двух функций распределения. Автор занимается обобщением его на три выборки при двух односторонних границах. Решение задачи осуществляется методом отражения. Находится точное распределение критерия проверки равенства трех теоретических функций распределений; для больших значений объемов выборок получаются асимптотические формулы.

По резюме автора

8076. **Точное выражение для первых четырех моментов усеченного распределения типа VI Пирсона. Филипсон** (Explicit expressions for the first four moments of a truncated distribution defined by Pearson Type VI. Philipson Carl), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 1—2, 63—69 (англ.)

8077. **Кривые распределения и нахождение кривых. Маджумер** (Frequency curves and curve fitting. Majumer Debidas), J. Assoc. Appl. Phys. Calcutta Univ., 1955, 1, 84—95 (англ.)

8078. **Функция распределения вероятностей для суммы квадратов. Бартон** (The probability distribution function of a sum of squares. Barton D. E.), Trabajos Estadistica, 1953, 4, 199—207 (англ., рез. исп.)

8079. **Последовательные процедуры в дисперсионном анализе. Раштон** (Sequential procedures in the analysis of variance. Rushton Stanley), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 300—301 (англ.)

8080. **Наблюдаемые значения автокорреляционной функции. Ито** (Observed value of the autocorrelation function. Itô Hirosi), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 198—202 (англ.)

8081. **Таблицы для использования корреляции рангов. Корсемакер, Вейнгарден** (Tables for use in rank correlation. Kaarsemaker L. and van Wijngaarden A.), Statistica, Rijswijk, 1953, 7, 41—54 (англ.; рез. нем.)

8082. **Об обобщенном нецентральном t-распределении и связанных с ним распределениях. Асорин-Поч** (On the generalized noncentral t distribution and related distributions. Azorin Poch Francisco), Trabajos Estadistica, 1953, 4, 173—198, 307—337 (исп., рез. англ.)

8083. **Выборочные распределения и градуировка. Ягер** (Sampling distributions and graduations. Jager J.), Verzekerings-Arch. Actuarieel Bijvoegsel, 1954, 31, 29—50 (англ.)

8084. **Некоторые дальнейшие расширения теорем Филлера. Беннетт** (Some further extensions of Fieller's theorem. Bennett B. M.), Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1954, 5, 103—106 (англ.)

8085. **«Средняя плотность» статистического распределения и его соотношение с «непрерывной информацией» Винера. Кастольди** («Densità media» di una distribuzione statistica e suo legame col «contenuto informativo» di N. Wiener. Castoldi Luigi), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 1955, (1954), 24, 232—236 (итал.)

8086. **Понятие правдоподобия. Альфен** (La notion de vraisemblance. Halphen Etienne), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1955, 4, 41—92 (франц.)

8087. **План опыта с симметричными неполными блоками при $\lambda=2$. Керавала** (Symmetrical incomplete block designs with $\lambda=2$. Kerawala Sulaiman), Scientist, Pakistan, 1953, 1, № 2, and 3, 1—24 (англ.)

8088. **Оптимальное размещение в последовательной выборке. Тиккивал** (Optimum allocation in successive sampling. Tikkiwal B. D.), J. Indian Soc. Agric. Statistics, 1953, 5, 100—102 (англ.)

8089. **Объединение нескольких Р. Р. S. обследований. Чаудхури** (Integration of several P. P. S. surveys. Choudhury D. K. Roy), Sci. and Culture, 1956, 22, № 2, 119—120 (англ.)

8090. **Доверительные пределы для компонент дисперсии. Моригути** (Confidence limits for a variance component. Moriguti Sigeiti), Rep. Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. Eng., 1954, 3, 29—41 (англ.)

8091 К. **Испытания, основанные на выборке. Дюма** (Les épreuves sur échantillon. Dumas Maurice. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1955. 170 pp., 1000 francs) (франц.)

8092 К. **Индекс распределений математической статистики. Хейт** (Index to the distributions of mathematical statistics. Haight F. A. Auckland University College, Auckland, New Zealand, 1955. 51 pp.) (англ.)

8093 К. **Об одновременном факторном анализе в нескольких популяциях. Раш** (On simultaneous factor analysis in several populations. Rasch G., Uppsala Symposium on Psychological Factor Analysis, 17—19 March 1953, pp. 65—71. Ejnar Munksgaard, Copenhagen; Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1953, 7) (англ.)

8094 К. **Вычисление определителей корреляционных уравнений. Княжева Н. И.** Ленингр. лесотехн. акад., Л., Науч.-исслед. сектор, 1956, 83 стр., илл., беспл.

Рассматривается методика вычисления определителей, входящих в состав коэффициентов корреляционных уравнений (РЖМат, 1957, 2538). Работа состоит из трех частей.

В первой части излагаются способы суммирования степеней натуральных чисел, используемые в дальнейшем.

В целях сокращения объема вычислений предлагается использовать формулу

$$\sum_{i=1}^{k} i^p = \frac{k+1}{(p+1)!}\, d_p,$$

где d_p — многочлен относительно $u_l = \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j k^{l-j}$; $l = 1, \ldots, p$. Рассматривается процедура вычисления d_p.

Во второй части рассмотрены способы нахождения сумм вида $\sum x^p$ степеней отклонений $x = [i - (n+1)/2]$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Часть третья посвящена вычислению определите-

лей D_m, имеющих вид:

$$D_{2k} = \left| \sum x^{2(i+j-2)} \right|_{\substack{i= \\ j=}} {}^{1, 2, \ldots, k+1}$$

$$D_{2k+1} = \left| \sum x^{2(i+j-1)} \right|_{\substack{i= \\ j=}} {}^{1, 2, \ldots, k+1}.$$

Вычисление ведется по формулам

$$D_{2k} = \frac{1}{4^k} \frac{\Pi_{m=2k+1}^{1} \left(\Pi_{i=n+2-2m}^{n-2+2m} i \right)}{\Pi_{m=1}^{k+1} \left(\Pi_{i=m}^{2k+2-m} (2i-1) \right)},$$

$$D_{2k+1} = \frac{1}{4^{2k+1}} \frac{\Pi_{m=2k+1}^{1} \left(\Pi_{i=n+1-2m}^{n-1+2m} i \right)}{\Pi_{m=1}^{k+1} \left(\Pi_{i=m}^{2k+2-m} (2i+1) \right)}.$$

Подробно излагается методика использования вырезных линеек и шаблонов, упрощающих технику вычисления. Н. П. Бусленко

8095 К. **Анализ плана с повторяющимися сбалансированными неполными блоками. Гарднер** (The analysis of a replicated balanced incomplete block design. Gardner Robert S., U. S. Naval Ordnance Test Station, Inyokern, Calif., Tech. Memo, 1953, 967, iv+15 pp.) (англ.)

8096 К. **Теория выборочного обследования с приложениями. Сукхатме** (Sampling theory of surveys with applications. Sukhatme Pandurang V., The Indian Society of Agricultural Statistics, New Delhi, India; The Iowa State College Press, Ames, Iowa, 1954, xxix+491 pp. 6.00 doll.) (англ.)

8097 К. **Статистика в исследовательском деле. Основные понятия и техника для научных работников. Осл** (Statistics in research. Basic concepts and techniques for research workers. Ostle Bernard. Ames, Iowa, Iowa State College Press, 1954, xiv+487 pp., 6.95 doll. (англ.)

8098 К. **Статистический метод и научный вывод. Фишер** (Statistical methods and scientific inference. Fisher Ronald Aylmer. Hafner Publ. Co.; Oliver, Clarke Irwin, 1956, 175 pp., 3.15 doll., 16 sh.), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 8, 43 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

8099. **Динамическое программирование и новый формализм в вариационном исчислении. I. Белман** (Dynamic programming and new formalism in the calculus of variations — I. Bellman Richard), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 3—5, 193—213 (англ.)

Динамическое программирование прилагается к вариационному исчислению, рассматриваемому как многотактный процесс разрешения непрерывного типа. Применение функционального уравнения динамического программирования дает дифференциальные уравнения в частных производных для экстремальных значений интеграла как функций параметров. Из этих уравнений находятся монотонно сходящиеся последовательные приближения к экстремальному значению и экстремальной кривой. Рассмотрены задачи:

1. Определение

$$\max_y J(y) = \int_0^\infty F(x, y)\, dt,$$

где $dx/dt = G(x, y)$, $x(0) = c$, и сходные с ней задачи.

2. Задача о собственных значениях оператора $L(u) = u'' + \lambda^2 \Phi(t) u$ $(u(0) = u(1) = 0)$.

И. В. Романовский

8100. **Вариационная задача с ограничениями в динамическом программировании. Белман** (A variational problem with constraints in dynamic programming. Bellman Richard), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 1, 48—61 (англ.)

Рассматривая вариационное исчисление как многотактный процесс разрешения, автор применяет динамическое программирование к отысканию минимума

$$J(y) = \int_0^T F(x, y)\, dt,$$

где

а) $\frac{dx}{dt} = G(x, y)$, $x(0) = c$,

б) $0 \leqslant y \leqslant x$.

С помощью функционального уравнения динамического программирования изучается структура экстремальной кривой при некоторых ограничениях, налагаемых на $G(x, y)$ в случае $F(x, y) = x - y$.

И. В. Романовский

8101. **Алгорифм для различных представителей. Холл** (An algorithm for distinct representatives. Hall Marshall, Jr), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 10, 716—717 (англ.)

Известно (Hall Ph., J. London Math. Soc., 1935, 10, 26—30), что для наличия у подмножеств $S_1, \ldots, S_n$ множества W системы различных представителей (РЖМат, 1957, 3358), необходимо и достаточно, чтобы для каждого $k = 1, \ldots, n$ объединение любых k различных подмножеств содержало хотя бы k различных элементов.

В статье указывается алгорифм, приводящий либо к построению системы различных представителей подмножеств $S_1, \ldots, S_n$, либо к обнаружению k различных подмножеств, объединение которых не содержит k различных элементов. Н. Н. Воробьев

8102. **К теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе сетей. Данциг, Фулкерсон** (On the max-flow min-dut theorem of networks. Dantzig G. B., Fulkerson D. R.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 215—221 (англ.)

Изучаются транспортные сети, состоящие из пунктов и линий, которые обладают конечными пропускными способностями, и соединяющие «источник» и «сток». Разрезом называется совокупность пунктов и линий, элементы которой содержатся в любом пути от источника к стоку. Задача об определении максимального потока формулируется как задача линейного программирования. Из дуальной задачи следует доказанная ранее Л. Р. Фордом и Фулкерсоном теорема о том, что максимальная величина потока равна минимуму по всем разрезам сумм пропускных способностей элементов разреза. И. В. Романовский

8103. **Линейное программирование. Сальвадори** (La programmazione lineare. Salvadori Mario), Civiltà macchine, 1957, 5, № 1, 22—24, 85 (итал.)

Автор на конкретном примере рассматривает основную задачу линейного программирования и ее решение симплекс-методом. И. Л. Канторович

8104. **Линейное программирование. Решающий шаг в научной организации. Руис-Пала** (La programación lineal. Un paso decisivo en la organización científica. Ruiz Palá Ernesto), Acero y energia, 1954, 11, № 66, 29—35 (исп.)

Приводятся постановка задачи линейного програм-

мирования, описывается применение симплекс-метода Данцига к решению этой задачи и рассматривается пример определения оптимального использования промышленного оборудования в условиях мелкосерийного производства. Н. Н. Воробьев

8105. **Симплекс-метод в линейном программировании. Агьяр-да-Силва-Леми** (O processo simplex na programacão linear. Aguiar da Silva Leme Ruy), Engenharia, 1955, 14, № 156, 104—107 (порт.)

На примере решения одной сельскохозяйственной задачи излагается сущность симплекс-метода в линейном программировании. Н. Н. Воробьев

8106. **Что такое линейное программирование? Манайра** (Che cosa è la programmazione lineare. Manaira Mario), Ingegneria mecc., 1955, 4, № 8, 5—10 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Происхождение задачи и связанных с ней вопросов. Практические правила. Приложения. Резюме автора

8107. **Линейное программирование. Гофман** (Linear programming. Hoffman A. J.), Appl. Mech. Revs, 1956, 9, № 5, 185—187 (англ.)

Статья общего характера (РЖМат, 1955, 2409). А. П. Ершов

8108. **Линейное программирование на вычислительных машинах. Вайда** (Linear programming on automatic computers. Vajda Stefan), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 188—189, 227: Diskuss., 189—191 (англ.; рез. нем.)

Приводится новый метод решения задач линейного программирования на вычислительных машинах, более выгодный, чем ранее применявшиеся. И. Л. Канторович

8109. **Библиография по линейному программированию. Род** (Bibliography on linear programming. Rohde F. Virginia), Operat. Res., 1957, 5, № 1, 45—62 (англ.)

Библиография по линейному программированию, содержащая 266 названий и сопровождаемая небольшим пояснением. И. В. Романовский

8110. **Пример оптимизации производства по имитирующим стоимость показателям. Чарнс, Купер, Меллон** (A model for optimizing production by reference to cost surrogates. Charnes A., Cooper W. W., Mellon B.), Econometrica, 1955, 23, № 3, 307—323 (англ.)

Рассматривается проблема построения производственного плана на последовательность равных интервалов времени, при котором

1) обеспечиваются поставки продукции в конце каждого интервала в заранее установленных размерах,

2) стоимость производства минимальна (наилучший план). Эта проблема решается в предположении, что производственные затраты в различных вариантах плана отличаются только трудовыми затратами, пропорциональными объему произведенной продукции, причем стоимость трудовых затрат в каждом интервале времени, как функция их величины, выраженной в рабочих часах, является непрерывной неубывающей функцией с неубывающей первой производной. Показывается, что в этих условиях наилучший план может быть найден без знания функции стоимости трудовых затрат.

Математической основой полученных результатов является

Теорема 1. Если

1. $f(x)$ — непрерывная, выпуклая, неубывающая функция,

2. $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$,

3. $a_m/m \geqslant a_j/j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ и m — наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих этому соотношению. Тогда имеется решение задачи минимизации функции $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ при условии $\sum_{i=1}^{r} x_i \geqslant a_r$, и это решение будет таким, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = a_m$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = a_m/m$.

А. А. Иванов

8111. **Использование передаточных функций в фирменном планировании. Джонсон, Тернер** (Use of transfer functions for company planning. Johnson Gordon K., Turner Inez M.), Operat. Res., 1956, 4, № 6, 705—710 (англ.)

Предлагается метод априорного определения объемного графика инженерно-конструкторских работ, обеспечивающих качество продукции, необходимое для ее сбыта. Метод основан на применении преобразования Лапласа. Объемный график инженерно-конструкторских работ, измеряемых в человеко-часах, и график сбыта продукции в ценностном выражении рассматриваются, как входная и выходная функции. Зависимость между ними, как и в линейных системах, определяется передаточной функцией, которую можно найти экспериментально на основе исследования имеющегося опыта изготовления и сбыта продукции. Утверждается, что отклонение рассчитанных по этому методу графиков от фактических не превышало 5% в исследованных авторами случаях, относящихся к работе авиационной промышленности. А. А. Иванов

8112. **Капиталовложения и математика. Бертолон** (Investissements et mathematiques. Bertholon F.), Chauff. mazout, 1957, № 3, 3—11 (франц.)

Решается вопрос об экономической целесообразности капиталовложений при данной норме прибыли, когда известны затраты на оборудование, общее время его эксплуатации и ежегодный доход, который считается одинаковым в течение всего периода эксплуатации оборудования. Рассуждения и выкладки совершенно элементарны. А. А. Иванов

8113. **Применение математики в производственном и инвентаризационном контроле. I. П. Важоньи** (The use of mathematics in production and inventory control. Vazsonyi Andrew), Management Sci., 1954, 1, 70—85; 1955, 1, 207—223 (англ.)

8114. **Состояние исследования операций в Соединенных Штатах в 1955 г. Фурнн** (État de la recherche opérationnelle aux États-Unis en 1955. Fournis Y.), Rev. statist. appliquée, 1956, 4, № 1, 79—83 (франц.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

8115. **Устранение избыточности, обусловленной междусимвольной зависимостью. Дейвис, Тротман** (The removal of the redundancy due to intersymbol dependence. Davis H., Trautman D. L.), IRE Convent., Rec., 1955, 3, № 4, 182—185 (англ.)

Последовательность случайных величин s_t ($t = 0, \pm 1, \ldots$) исследуется с точки зрения возможности ее передачи по каналам связи. С этой целью вводится мера «избыточности» информации, содержащейся в каждой величине s_t, которая полагается равной количеству информации относительно s_T ($T < t$), содержащейся в предшествующих членах последовательности, т. е. величине

$$I(s_t; -\infty) = \lim_{T \to -\infty} I(s_t; s_T), \qquad (1)$$

где:

$$I(s_t;\ s_T) = \sum_{\sigma_t, \ldots, \sigma_T} p(\sigma_t, \ldots, \sigma_T) \times$$

$$\times \log \frac{p(\sigma_t, \ldots, \sigma_T)}{p(\sigma_t)\, p(\sigma_{t-1}, \ldots, \sigma_T)},$$

в случае дискретных распределений и

$$I(s_t;\ s_T) = \int p(\sigma_t, \ldots, \sigma_T) \times$$

$$\times \log \frac{p(\sigma_t, \ldots, \sigma_T)}{p(\sigma_t)\, p(\sigma_{t-1}, \ldots, \sigma_T)}\, d\sigma_t \ldots d\sigma_T$$

в случае непрерывных распределений. Утверждается, что в случае $I(s_t;\ -\infty) < \infty$ последовательность s_t может быть «преобразована» без предвосхищения (т. е. с использованием при образовании r_t лишь величин s_t, s_{t-1}, ...) в последовательность r_t так, что

$$I(r_t;\ -\infty) = 0 \qquad (2)$$

и каждая величина s_t определяется однозначно по r_t, r_{t-1}, ...

Если условные функции распределения $F_t(\sigma) = P(s_t < c/s_{t-1}, s_{t-2}, \ldots)$ непрерывны, то можно положить $r_t = F_t^{-1}(s_t)$, и (2) вытекает из того обстоятельства, что величины r_t взаимно независимы. Как понимается автором «преобразование» последовательности s_t в последовательность r_t в общем случае, не вполне ясно.

Делаются общие замечания о возможности аналогичных результатов без условия (1), и отмечается, что для случая стационарного гауссовского процесса s_t аналогичные результаты хорошо известны в форме разложения Волда $s_t = \sum_{\tau \geqslant 0} c_\tau r_{t-\tau}$.

А. Н. Колмогоров, И. П. Цареградский

8116. **Об одном свойстве статистических распределений продолжительности жизни [образцов] при испытании на усталость. Бастенер** (Sur une propriété des distributions statistiques des durées de vie à la fatigue. Bastenaire François), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 18, 1270—1273 (франц.)

Статистическая картина распределения продолжительности жизни образцов, подвергаемых испытаниям на усталость, описывается системой кривых $p = F(S, N)$, где S — амплитуда периодической нагрузки в последовательных циклах испытаний, p — вероятность излома ранее, чем за N циклов при данной амплитуде S. При любом N существуют столь большие значения S, что p как угодно близка к единице. В то же время опыт показывает, что если S лежит в так называемой зоне «выносливости», то вероятность излома не стремится к единице при $N \to \infty$. Автор допускает, что кривые равной вероятности $F(S, N)$ в соответствии с опытными данными могут быть достаточно точно описаны следующим уравнением: $S - E = A(N - U)^{-c}$, E, A, $U \geqslant 0$, $S \geqslant E$, $N > U$, $c > 0$, и все эти константы зависят от p. Делая еще ряд предположений, автор анализирует условную плотность распределения продолжительности жизни тех образцов, которые подвергаются излому при S, принадлежащей к зоне выносливости; он показывает, что это условное распределение не может обладать моментами выше некоторого порядка c_0, где c_0 есть значение коэффициента c при $p = F(S_0, \infty)$. Так как на практике мы наблюдаем значения c, не превосходящие единицу, понятие средней продолжительности жизни и ее дисперсии лишены статистического смысла. Этот вывод находится в противоречии с концепцией Гумбеля, оперирующей с распределениями продолжительности жизни, обладающими моментами всех порядков. Н. В. Смирнов

8117. **Дисперсионное уравнение колебаний плазмы. Клеммов, Вильсон** (The distribution equation in plasma oscillations. Clemmow P. C., Willson A. J.), Proc. Roy. Soc., 1956, A237, № 1208, 117—131 (англ.)

Исследуются одномерные продольные колебания плазмы (электронного газа), в предположении, что электрическое поле имеет вид:

$$E_\alpha = (0,\ 0,\ E)\, e^{i(\omega t - kz)}.$$

Авторы исходят из кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c u_3}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{eE}{mc} \frac{\partial f}{\partial u_3} e^{i(\omega t - kz)} = 0,$$

где u_α — величины, связанные с компонентами скорости v_α соотношениями

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Функция распределения f ищется в виде:

$$f = N[f_0 + \Psi e^{i(\omega t - kz)}],$$

здесь N — число электронов в единице объема, Ψ — функция, зависящая только от компонент u_α, причем $\Psi = 0$ при $E = 0$, Nf_0 — функция распределения электронов в невозмущенном состоянии; предполагается, что f_0 не зависит от координат и времени и является изотропной функцией скорости.

Рассматривая Ψ, как малое возмущение, и пренебрегая величиной ΨE, авторы определяют эту функцию из уравнения (1) и приходят в конечном счете к следующему дисперсионному уравнению:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 4\pi \int_0^\infty \frac{F_0(u)\, u^2}{(1 + u^2)^{3/2}\,[1 + u^2(1 - \mu^2)]}, \qquad (2)$$

где

$$F_0(u) = \int_0^u (1 + u^2) \frac{df_0}{du}\, du,$$

$\mu = c_k/\omega$, $\omega_0 = Ne^2/m\varepsilon$, ε — диэлектрическая постоянная свободного пространства.

Далее исследуются общие свойства уравнения (2), а также анализируется частный случай, когда невозмущенное распределение по скоростям f_0 является распределением Максвелла. Д. П. Костомаров

8118. **Заметка по истории выборочного метода в России. Жаркович** (Note on the history of sampling methods in Russia. Žarkovič S. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, A119, № 3, 336—338 (англ.)

Обозрение публикаций (свыше 20 назв.) по вопросам теории и практики выборочного метода, помещенных в «Вестнике статистики» в 1919—1929 гг. Более подробно комментируется статья Н. С. Четверикова «О выборочном исследовании» (1919 г., № 8—12) и его же рецензия (1925 г., №№ 1—3) на монографию А. Г. Ковалевского «Основы теории выборочного метода» (Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1924 г., 2, вып. 2). Отмечается высокий уровень теоретических исследований и практических работ, выполненных в то время советскими статистиками. А. А. Конюс

8119. **Приложение статистики в физических и химических исследованиях. Клавье** (Applications de la statistique á des recherches physiques et chimi-

ques. Clavier Alain), Chimie et industrie, 1957, 77, № 1, 79—90 № 2, 297—311 (франц.; рез. англ., исп.)

В настоящей работе, предназначенной для исследователей в области физики и химии, автор знакомит с основными понятиями математической статистики и разбирает ряд конкретных примеров их приложений, в частности, рассматривает задачу оценки соответствия результатов эксперимента некоторой кривой, параметры которой определяются по методу наименьших квадратов. Показывается, что даже при установлении плана экспериментов исследователь может руководствоваться соображениями статистического порядка.

По резюме автора

8120. **Критическое магнитное рассеивание нейтронов из железа. Герш, Шалл, Уилкинсон** (Critical magnetic scattering of neutrons by iron. Gersch H. A., Shull C. G., Wilkinson M. K.), Phys. Rev., 1956, 103, № 3, 525—534 (англ.)

8121. **Приближенная формула Лидстона и функция Макехама. Еклин** (Lidstonesche Näherungsformel und Makehamsche Funktion. Jecklin Heinrich), Bl. Deutsch. Ges. Versicherungsmath., 1954, 2, № 1, 61—70 (нем.)

8122. **Некоторые заметки об аппроксимациях, принадлежащих Лидстону и некоторым другим авторам, временных пожизненных рент, когда интенсивность смертности равна $(1+k)\mu_{x+t}$. Окерберг** (Some notes on Lidstone's and other approximations to temporary life annuities when the force of mortality is $(1+k)\mu_{x+t}$. Åkerberg Bengt), Mitt. Ver. pschweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, 55, № 3, 409—415 (англ.)

8123. **Подбор в психологии. Спиц** (Matching in psychology. Spitz J. C.), Statistica, Rijswijk, 1953, 7, 23—40 (датск.; рез. англ.)
Перевод из Math. Revs. 1954, 15, № 5, 443

8124. **Замечание об установлении статей расхода для индекса стоимости жизни. Банерджи** (A note in the treatment of composite items in the constructions of cost of living index numbers. Banerjee K. S.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 7, № 25, 35—40 (англ.)

8125. **О статистической обратимости броуновского движения. Яглом** (Über die statistische Umkehrbarkeit der Brownschen Bewegung. Yaglom A. M. Abhandlungen aus der Sowjetischen Physik, Folge III, pp. 7—42. Verlag Kultur und Fortschritt, Berlin, 1953) (нем.)
Перевод из Матем. сб., 1949, 24 (66), 457—492.

8126 К. **Метод статистической выборки для ревизоров и бухгалтеров. Ванс, Нитер** (Statistical sampling for auditors and accountants. Vance Lawrence Lee, Neter John. Wiley, 1956, 310 pp., 9 doll.), Cumul. Book. Index, 1956, 59, № 8, 127 (англ.)

8127 К. **Страховая математика. Ч. I. Основы математических наук в особом изложении с специальным учетом области применения. Заксер** (Versicherungsmathematik. Teil I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. LXXIX. Saxer Walter. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. ix, 249 pp. Geheftet 36.00 DM; gebunden 39. 60 DM) (нем.)

8128 Д. **Статистическая теория, примененная к коммуникации с повреждениями на нескольких путях. Прайс** (Statistical theory applied to communication through multipath disturbances. Price Robert. Res. Lab. Electronics, Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, Mass., Techn. Rept, 1953, № 266, v+70 pp.) (англ.)

См. также: 7604, 7842, 7845, 7988, 8038.

ГЕОМЕТРИЯ

8129. **Арифметика вечного возвращения. Вводная статья о представлении качественной непифагорической арифметики, в которой для каждого числа найдется свой спектр, своя структура и свой образ. Гомес-Майорга** (L'aritmetica dell'eterno ritorno. Un primo saggio di aritmetica non-pitagorica, qualitativa, in cui ogni numero ritrova il suo spettro, il suo scheletro, la sua figura. Gomez Mayorga Mauricio), Civilitá macchine, 1955, 3, № 3, 59—60 (итал.)

8130. **Гаусс как геометр** (Gauss as Geometer), Euclides, Groningen, 1954/55, 30, 276—281 (голл.)
Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 117.

8131. **Трисекция угла. Родригес** (Triseccion de angulos. Rodríguez Alberto), Rev. mat. elementales, 1956, 4, № 2-5, 32—36 (исп.)

После краткого указания на работы Прокла и Диностата, автор переходит к изложению трудов дон Мариано Бераун, преподавателя из Гуануко в Перу (вторая половина прошлого века). Бераун пишет уравнение «трисектриссы» в виде

$$y^2 = \frac{x^2(3r-2x)}{r+2x}$$

и использует только замкнутую часть кривой. Работы Маклорена ему не были известны.

В работе неясно, что сделал сам Бераун, а что привнес автор статьи; нет также ни одной ссылки на источники.
Р. И. Пименов

8132. **О построении правильного семиугольника Виетом. Гофман** (Über Viètes Konstruktion des regelmässigen Siebenecks. Hofmann Jos. E.), Centaurus, 1956, 4, № 3, 177—184 (нем.)

Приводятся некоторые исторические сведения о точных и приближенных построениях правильного семиугольника; подробнее рассматриваются исследования Виета (Viète Fr., Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII, Tours 1593; Supplementum geometriae, Tours, 1593), в которых задача о построении правильного семиугольника связывается с задачей о трисекции угла.
А. Г. Дорфман

8133 К. **Собрание сочинений. Том. 4. Деформация квадрик, теория преобразования поверхностей, развертывающихся на квадриках. Часть 2-я. Бианки** (Opere. Vol. IV. Deformazioni delle quadriche, teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. Parte seconda. Bianchi L.) Roma, Edizioni Cremonese, 1956, 365 pp., 3.000 l.) (итал.)

В данном томе собрания сочинений автора приводятся тексты одиннадцати его статей по геометрии.

8134 К. **К открытиям в геометрии. Фридель** (A la découverte de la géométrie. Friedel H. Paris, Dunod, 1957, XIV, 110 p. ill., 480 fr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 16, 366 (франц.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

8135. **Векторный способ определения сферических координат векторов скорости и ускорения. Рашкович** (Један векторски начин за одређи-

вање сферних координата вектора брзине и убрзања. Рашковић Данило), Зб. радова Српска АН, 1956, **50**, 249—263 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Излагается векторный способ определения проекций скорости и ускорения на оси сферической системы координат. А. В. Погорелов

8136. **Дополнительные леммы к теоремам Паппоса—Гюльдена. Рашкович** (Dopunski stavovi uz Pappos—Guldin'ove teoreme. Rašković Danilo), Tehnika, 1956, **11**, № 9, 1289—1293 (сербохорв.; рез. англ.)

Показывается, что к хорошо известным теоремам Паппоса—Гюльдена можно добавить две дополнительные леммы относительно определения центра тяжести тела вращения и его поверхности в случае, если образующая линия обладает осью симметрии, параллельной или перпендикулярной к оси вращения. Это облегчает определение момента инерции тела вращения, что важно в инженерной практике. Из резюме автора

8137. **О корректной жесткости поверхностей. Морозова Е. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **2**, М., АН СССР, 1956, 140—141

Поскольку смещения $\bar{z}$ точек поверхности в теории оболочек удовлетворяет неоднородному уравнению бесконечно малых изгибаний поверхности, то геометрическое и механическое понятия жесткости, вообще говоря, не совпадают. В связи с этим уточняется определение жесткости. Именно, говорят о корректной жесткости, если решение неоднородного уравнения, определяющего смещения точек, непрерывно зависит как от краевых условий, так и от правой части. Э. Г. Позняк

8138. **К геометрии плоских конфигураций упругих сил. Аймерих** (Sulla geometria delle configurazioni piane di sforzi elastici. Aymerich Giuseppe), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952 (1953), **22**, 38—47 (итал.)

Основная теорема Саенса (Neményi and Sáenz, J. Rational Mech. Anal., 1952, **1**, 73—86; Math. Rev., **13**. 703) утверждает, что данная конгруэнция плоских кривых определяет 2—5-параметрическое семейство плоских упругих систем, для которых эти кривые являются траекториями напряжения. Автор строит подобное доказательство аналогичной теоремы, где заданные кривые будут линиями постоянных максимальных касательных напряжений. При помощи этого результата он может закончить недавний анализ, рассматривающий сопряженные напряженные состояния (два напряженных состояния называются сопряженными, если их функции Эри Φ и ψ таковы, что $\Phi+i\psi$ будет аналитической функцией второго порядка в смысле Бургатти). Теорема автора дает следующий результат: исключая особый вырожденный случай, две системы плоского напряженного состояния, имеющие одинаковые линии постоянного (наибольшего) касательного напряжения и взаимно ортогональные линии постоянной плотности, являются сопряженными.

C. Truesdell

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 579

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8139. **Об отрезках Торричелли. Кавалларо** (Sui segmenti torricelliani. Cavallaro Vincenzo G.), Giorn. mat. Battaglini, 1956, **84**, № 1, 81—91 (итал.)

Приводятся многочисленные соотношения из геометрии треугольника, содержащие длины T, T' отрезков Торричелли (РЖМат, 1954, 4887). Пример: если T, T', T_1, T_1' — отрезки Торричелли треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, то условие $T/T'=(T_1/T_1')^2$ необходимо и достаточно для того, чтобы угол Брокара треугольника $A_1B_1C_1$ был равен первому углу Штейнера треугольника ABC. Часть результатов была опубликована автором уже раньше. Г. К. Энгелис

8140. **О прямой Симсона. Тебо** (Sur la droite de Simson. Thébault Victor), Mathesis, 1956, **65**, № 4—6, 201—205 (франц.)

Доказываются теоремы: 1) Если прямая Симсона Δ точки M относительно треугольника ABC пересекает сторону AB в точке E и проходит через центр O окружности, описанной около треугольника, то прямая, соединяющая E с точкой C', диаметрально противоположной вершине C треугольника ABC, встречает эту окружность в точке M', симметричной M относительно Δ, и наоборот; 2) Ортоцентрическая прямая полного четырехсторонника (ABC, Δ), одна сторона которого Δ есть диаметр описанной около треугольника ABC окружности, встречает эту окружность в точке F, симметричной ортоцентру H треугольника ABC относительно ортополюса ω прямой Δ для треугольника ABC. Точка F совпадает с точкой, прямая Симсона которой перпендикулярна к Δ, а также с точкой, изогональной бесконечно удаленной точке прямой Δ. Н. В. Наумович

8141. **Подобные эпициклоиды или гипоциклоиды, касающиеся 2, 3 или 4 прямых. Мармион** (Épi- ou hypocycloïdes semblables tangentes à 2, 3 ou 4 droites. Marmion A.), Mathesis, 1956, **65**, № 4—6, 234—252 (франц.)

В 1929 г. была опубликована монография Лемера (Lemaire J; Hypocycloïdes et épicycloïdes, 1929), в которой элементарно-синтетическими средствами изложены многие свойства этих замечательных кривых. Автор продолжает исследования Лемера. Много внимания уделяется изучению геометрического места центров эпициклоид и гипоциклоид, касающихся 2, 3 или 4 прямых. Широко используются положения геометрии треугольника с значительным пополнением этой области элементарной геометрии. М. П. Черняев

8142. **О геометрии тетраэдра. Авдис, Тебо** (Sur la géométrie du tétraèdre. Avdis J., Thébault V.), Mathesis, 1956, **65**, № 4—6, 214—218 (франц.)

Авторы, пользуясь некоторыми элементарными свойствами дву- и трехгранных углов тетраэдра, доказывают, что только два противоположных внутренних двугранных угла его могут дать сумму, равную π. Для доказательства приводятся леммы:

Лемма I. Если луч AA' находится внутри трехгранного угла $A(BCD)$, то невозможно одновременное существование равных углов:

$$(AA', AB)=(AC, AD),\ (AA', AC)=(AD, AB),$$

$$(AA', AD)=(AB, AC).$$

Лемма II. Лучи, проведенные из вершин тетраэдра перпендикулярно к противоположным граням, находятся внутри трехгранных углов, дополнительных к соответствующим трехгранным углам тетраэдра (дополнительными называются углы, образуемые нормалями к граням, проходящими через вершину трехгранного угла). А. И. Фетисов

8143. **О двух теоремах Д. Помпейю. Павлович** (Sur deux théorèmes de D. Pompeiu. Pavlović S. V.), Mathesis, 1956, **65**, № 4—6, 211—214 (франц.)

Рассматриваются теоремы: 1. Если точку в плоскости равностороннего треугольника соединить с его верши-

нами, то по этим отрезкам можно построить треугольник. 2. Если точку в плоскости равностороннего замкнутого многоугольника соединить с серединами его сторон, то по этим отрезкам можно построить замкнутый многоугольник.

Теорема 2 доказывается для случая правильного многоугольника. А. И. Фетисов

8144. **Общее уравнение коник (конических сечений) и псевдоконик. Херрон, Дейвис** (General equation for conics and pseudoconics. Herron R. E., Davis D. S.), Virginia J. Sci, 1954, 5, № 1, 17—19 (англ.)

В работах Дейвиса и др. даются построения коник и псевдоконик с помощью окружности. Настоящая статья содержит на основании этого вывода уравнения коник и псевдоконик. К. М. Белов

8145. **Теорема, обратная теореме Пифагора. Силлитто** (The converse of the theorem of Pythagoras. Sillitto A. G.), Math. Gaz., 1957, 41, № 335, 50—51 (англ.)

Независимо от теоремы Пифагора доказывается: Если для сторон треугольника выполнено $a^2=c^2-b^2$, то угол, противолежащий c, прямой.

К. С. Сцилард

8146. **Свойства медиан вписанного четырехсторонника. Лабра** (Properties of the medians of an inscribed quadrilateral. Labra Manuel), Rev. Soc. Cubana Ci. Fis. Mat., 1954, 3, 79—88 (исп.)

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 738.

8147. **Теорема, равносильная теореме Чевы. Кнапинский** (Twierdzenie równowazne twierdzeniu Cevy. Knapiński Tadeusz), Matematyka, 1957, 10, № 1, 1—4 (польск.)

8148 К. **Геометрические преобразования. 2. Линейные и круговые преобразования. Яглом И. М.,** Гостехиздат, 1956, 611 стр., илл., 10 р. 45 к.

Автор составили нтересную монорафию в двух томах об элементарной геометрии на теоретико-групповой основе (РЖМат, 1957, 6579). Второй том этой монографии посвящен линейным и круговым преобразованиям. Преподавателям средних школ и студентам физико-математических факультетов педагогических институтов реферируемый том дает обильный материал для глубокого ознакомления с синтетическими методами геометрии. Книга является ценным пособием для всех интересующихся проективной геометрией, в которой на элементарно-геометрическом материале умело освещены основные идеи этой увлекательной области геометрии. М. П. Черняев

8149 К. **Упражнения по аналитической геометрии для студентов-математиков. Том 3, 6-е изд. Обер, Папелье** (Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Tome 3e, 6e ed. Aubert Paul, Papelier Georges. Paris, Vuibert, 1956, 377 p., ill., 720 fr.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 9, 199 (франц.)

8150 К. **Элементы геометрии для поступающих в офицерские школы. Мазий** (Éléments de géométrie à l'usage des candidats élèves officiers. Mazille Marcel. Paris, Charles—Lavauzelle et Cie, 1956, 242 p., ill., 480 fr.), Bibliogr., France, 1957, 146, № 9, 199 (франц.)

8151 К. **Элементы аналитической геометрии. 2-ая часть. Трехмерная геометрия, 2-е изд. Пейшоту** (Elementos de geometria analitica 2 parte; geometria de três dimensoes. 2 ed. Peixoto Roberto. Rio de Janeiro, Liv, Francisco ves, 1957, 128 p., il., 50, 00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 6, 289 (порт.)

8152 К. **Краткий курс аналитической геометрии. Изд. 3-е стереотипн. Ефимов Н. В.** М., Гостехиздат, 1956, 256 стр., илл., 6 р. 35 к.

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8153. **Об ортогональной квазипроекции шара. Потоцкий М. В.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, 143—145

Рассматриваается часто встречающийся неверный чертеж шара, на котором экватор изображен в виде эллипса, а сопряженные с этим экватором полюсы помещены на абрисе шара. Этот чертеж автор называет ортогональной квазипроекцией шара. Общего определения квазипроекции и ортогональной квазипроекции в работе нет. Приводятся методические соображения, по которым автор считает допустимым в процессе преподавания использовать этот неверный, но просто выполняемый чертеж. Н. М. Бескин

8154. **О пространственных коллинеациях. Легрен-Писсар** (Sur les homographies de l'espace. Legrain Pissard), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 4, 209—221 (франц.)

Двухосной называется коллинеация, в которой все точки двух скрещивающихся прямых u и v являются двойными точками. Отсюда следует, что прямая XX', соединяющая пару соответствующих точек, пересекает u и v в точках X_u и X_v, где вурф $(XX_uX'X_v)=\text{const}$. Если $(XX_uX'X_v)=-1$, то коллинеация называется гиперболической гармонической коллинеацией.

Автор строго синтетическим методом доказывает ряд теорем о разложении различных видов пространственных коллинеаций на произведение двух гиперболических гармонических коллинеаций. Например.

1. Параболическая двухосная коллинеация есть произведение двух гиперболических гармонических коллинеаций, имеющих одну общую ось, совпадающую с осью данной коллинеации, и две другие оси, не лежащие в одной плоскости.

2. Особая гомология (центр гомологии лежит в плоскости гомологии) разлагается на произведение двух гиперболических гармонических коллинеаций, имеющих одну общую ось и две другие, расположенные в одной плоскости и др.

Примечание референта. Некоторые из доказываемых в статье теорем были известны ранее. Например, теорему Легрен-Писсар о разложении непараболической двухосной коллинеации на произведение двух гиперболических гармонических коллинеаций можно найти в книге Veblen and Joung, Projective geometry, Нью-Йорк, 1918, 2, 260.

Т. В. Солнцева

8155. **О двумерных геометриях с абсолютом в виде кривой второй степени. Скородумов В. М.,** Изв. Киевск. политех. ин-та, 1956, 19, 345—359

На евклидовой модели проективной плоскости рассматриваются геометрии, соответствующие различным вариантам вырожденного абсолюта: 1) пара мнимых прямых с общей действительной точкой (коевклидова геометрия); 2) действительная прямая с парой действительных различных точек (псевдоевклидова геометрия); 3) пара действительных прямых с точкой их пересечения (копсевдоевклидова геометрия); 4) двойная действительная прямая с двойной действительной точкой (предельная псевдоевклидова геометрия).

Приводятся выражения для основных метрических понятий, а также классификация кривых второго порядка в этих геометриях.

Примечание референта. В классификации кривых второго порядка псевдоевклидовой плоскости условия, приведенные автором для случаев 3) (гиперболическая парабола), 8) (вогнутая гипербола) и 9) (полугипербола), являются лишь достаточными.

Г. С. Бархин

8156. **Теория поверхностей в пространстве с распадающимся абсолютом. Хатипов А. Э.,** Тр. Семи-

нара по вектор. и тензор. анализу, МГУ, 1956, вып. 10, 285—308

В трехмерном проективном пространстве вводится двойной абсолют, который состоит из двух мнимосопряженных плоскостей и двух мнимосопряженных точек, принадлежащих оси абсолюта, т. е. той прямой, по которой пересекаются его плоскости.

Поверхность нормализуется так, что ее нормаль первого рода пересекает ось абсолюта, образуя гармоническую четверку с прямыми, направленными из точки поверхности в абсолютные точки, и прямой, расположенной в касательной плоскости. Нормаль второго рода определяется двойственным образом: она образует гармоническую четверку с прямыми пересечения касательной плоскости с абсолютными плоскостями, и прямой, соединяющей точку их пересечения с точкой поверхности.

Для поверхности, нормализованной указанным способом, составляются основные дифференциальные уравнения и выводятся условия их интегрируемости. Оказывается, что внутренние геометрии нормализованной поверхности принадлежат тому классу геометрий аффинных связностей, который допускает вырожденную метрику, и рассматривались референтом (Матем. сб., 1946, 18 (60), № 1). А. П. Норден

8157. Вывод гиперболической тригонометрии из круговой модели Пуанкаре. Сас (Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen. Szász Paul), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 1, 65—69 (нем.; рез. русск.)

Из круговой модели Пуанкаре выведены две зависимости между элементами прямоугольного треугольника (из которых следует вся гиперболическая тригонометрия).

Примечание референта. По сути дела автор использует переход от модели Пуанкаре к модели Бельтрами. А. С. Смогоржевский

8158 К. Лекции и задачи по начертательной геометрии. Учебн. пособие по курсу «Начертательная геометрия». Ч. I. Вып. 4. Посвянский А. Д. Дальневост. политехн. ин-т. Владивосток. 1956, 257—309 стр., илл.

8159 К. Сборник начертательной геометрии и инженерной графики., Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1 (49). Тбилиси, 1957, 219 стр., илл., 10 руб.

8160 К. Задачник по начертательной геометрии. Астахов В. Д., Блинов И. С., Брызгалов Н. Н., Корытин А. А. Моск. энерг. ин-т, М., 1957, 105 стр., илл., беспл.

8161 К. Начертательная геометрия. Учебник для машиностроит. вузов. Флеров Г. М. Горьковск. политехн. ин-т, Горький, 1956, 52 стр.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8162. О некоторых существенных аспектах алгебраической геометрии. Кизини (Aspetti significativi della geometria algebrica. Chisini Oscar. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari № 6, 1955, 22 pp.) (итал.)

Изложение доклада.

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 85.

8163. Образ кривых n-го порядка при отображении плоскости на прямую и обратно. Берадзе А., Тр. Батумск. гос. пед. ин-та, 1956, 5, 183—184

Инволюцией порядка n называется соответствие точек данной прямой, при котором координаты соответственных точек связаны между собою симметричным уравнением порядка $2n$. Если с помощью формул

$$x=\frac{2(x'+x'')}{x'x''+4}, \quad y=\frac{x'x''-4}{x'x''+4}$$

ввести преобразование точек $M(x, y)$ плоскости в пары точек $M'(x')$, $M''(x'')$ некоторой прямой, то линия порядка n будет давать на этой прямой инволюцию n-го порядка и обратно. С. Г. Кислицын

8164. Основная система тригонометрии и кубическая поверхность. Куццер-Нотари (Sistema fondamentale per la trigonometria e superficie cubica. Cuzzer Notari Vittoria), Period. mat., 1956, 34, № 1, 13—37 (итал.)

Основной системой тригонометрии называется совокупность условий, необходимых и достаточных для того, чтобы шесть заданных величин были сторонами и углами некоторого треугольника. Исследуется система $x^2=y^2+z^2+myz$, $y^2=z^2+x^2+nzx$, $z^2=x^2+y^2+qxy$, которая может иметь решение $x>0$, $y>0$, $z>0$ только в случае

$$m^2+n^2+q^2-mnq-4=0. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что система $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $a>0$ является основной. В связи с этим подробно исследуется поверхность (1) и находятся области ее, соответствующие различным видам треугольников.

Примечание референта. Другие основные системы см. С. И. Новоселов (РЖМат, 1953, 1069). Г. К. Энгелис

8165. Обобщение теоремы Паскаля: теорема о трех кривых. Эли (Une généralisation du théorème de Pascal: le théorème des trois courbes. Hély Jean), Rev. scient., 1954, 92, № 1, 32—33 (франц.)

Рассматриваются три алгебраические кривые L, M, N порядков l, m, n ($l\leqslant m\leqslant n$), имеющие p общих точек. 1) Если $l+m-n>0$ и $p\geqslant lm-s$

$$\left(s=\frac{(l+m-n-1)(l+m-n-2)}{2}\right),$$

то: а) кривые имеют lm общих точек; б) если $l<n$, то $m(n-l)$ точек, общих кривым M и N и не лежащих на L, принадлежат некоторой кривой C_1 порядка $n-l<m$; в) если $m<n$, то $l(n-m)$ точек, общих кривым L и N и не лежащих на M, расположены на кривой C_2 порядка $n-m<l$; г) $(n-l)(n-m)$ точек пересечения кривых C_1 и C_2 лежат на кривой порядка n. 2) Если $l+m-n\leqslant 0$ и $p=lm$, то: а) $m(n-l)$ точек, общих кривым M и N и не принадлежащих кривой L, лежат на всех кривых порядка $n-l>m$, которые проходят через $m(n-l)-\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ из них и через s других произвольных точек; б) $l(n-m)$ точек, общих кривым L и N и не лежащих на кривой M, расположены на всех кривых, проходящих через $l(n-m)-\frac{(l-1)(l-2)}{2}$ из них и s произвольных точек; в) $(n-l)(n-m)$ точек пересечения указанных выше кривых порядков $n-l$ и $n-m$, которые проходят через одни и те же s произвольных точек кривой N, не принадлежащих кривым L или M, все лежат на кривой N.

Даны указания к доказательствам этих предложений.

Если $l=2$, а кривые порядка m и n образованы соответственно сторонами с четными и сторонами с нечетными номерами $2n$-угольника, вписанного в коническое сечение, то при $n=3$ получаем теорему Паскаля, а при $n=4$ следующее предложение: в коническое сечение вписан восьмиугольник; восемь точек пересечения каждой стороны со сторонами, приле-

гающими к противоположной стороне, лежат на одном и том же коническом сечении. А. Г. Школьник

8166. **К геометрии бинарной формы четвертого порядка. Фишман** (До геометрії бінарної форми четвертого порядку. Фішман К. М.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-та, 1956, 19, 75—82 (укр.; рез. русск.)

Устанавливается связь между двумя геометрическими истолкованиями бинарной формы 4-го порядка: схемой Комессатти (Comessatti A.), истолковывающей бинарные формы как точки некоторого проективного пространства, и схемой Бернсайда (Burnside), изучающей бинарную форму 4-го порядка с помощью невырожденного пучка конических сечений. Эта связь устанавливается на основе схемы Комессатти для квадратичной формы.

Каждой бинарной форме 4-го порядка $f=(ax)^4$ ставится в соответствие проективное преобразование U_f плоскости (π) в себя, точки которой истолковываются по той же схеме Комессатти, как бинарные формы $\varphi=(bx)^2$ 2-го порядка. Это преобразование получается из квадратичного соотношения

$$(b^*x)^2=[ab]^2(ax)^2,$$

где $(b^*x)^2$ есть бинарная форма 2-го порядка, соответствующая через U_f форме $\varphi=(bx)^2$. Изучение бинарной формы 4-го порядка сводится к изучению класса преобразований U_f относительно автоморфизмов TU_fT^{-1}, где T пробегает все возможные проективные преобразования плоскости (π), оставляющие неподвижной рациональную нормальную кривую.

Резюме автора

8167. **О псевдоканонических жанрах регулярных алгебраических поверхностей в их связи с алгебраической структурой первой группы кручения. Холле** (Sur les genres pseudocanoniques des surfaces algébriques régulières dans leurs rapports avec la structure algébrique du premier groupe de torsion. Nollet Louis), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 5, 579—595 (франц.)

Ранее (РЖМат, 1956, 2398) автором было показано, что увеличенные на 1 размерности псевдоканонических систем или псевдоканонические жанры регулярной поверхности совпадают с ее геометрическим жанром; это доказательство опиралось на один результат Андреотти, оказавшийся неверным. Здесь предпринимается новое исследование псевдоканонических жанров, показывающее, что они влияют на классификацию алгебраических поверхностей. Предварительно изучается неприводимая алгебраическая поверхность F без кратных точек и без исключительных кривых первого рода, несущая пучок эллиптических кривых нулевой степени (РЖМат, 1956, 3277). Если e_iF_i $(i=1, \ldots, s)$ — элементы пучка, соответствующие отличным от единицы дивизорам e_i, то $Z=\sum z_iE_i-zE$ $\left(z=\sum z_i/e_i\right)$ порождает полную псевдоканоническую систему $|K+Z|$ с избытком $s'-1-z$ (s' — число положительных z_i). Для того чтобы все псевдоканонические системы F были регулярны (т. е. псевдоканонические жанры совпадали с геометрическим жанром), необходимо и достаточно, чтобы либо 1) все e_i были взаимно просты, кроме одной пары их; гогда алгебраические дивизоры F-нуля образуют циклическую группу, либо 2) $e_i=2d_i$ $(i=1, 2, 3)$, $e_i=d_i$ $(i>3)$, причем все d_i взаимно просты и d_i $(i>3)$ нечетные; при этом алгебраические дивизоры F-нуля образуют группу Клейна.

В заключение устанавливается следующее общее предложение: для того чтобы регулярная неприводимая алгебраическая поверхность с первой группой кручения, изоморфной абстрактной группе G, не имела избыточных псевдоканонических систем, необходимо, чтобы G была либо группой Клейна, либо циклической порядка p^m, где p — простое. Для поверхностей, несущих пучок эллиптических кривых нулевой степени, последнее условие также и достаточно.

В. В. Морозов

8168. **Внутреннее доказательство теоремы Римана—Роха для кривой. Везентини** (Dimostrazione itrinseca del teorema di Riemann—Roch sopra una curva. Vesentini Edoardo), Pont. Acad. Sci. Acta, 1953, 15, 137—153 (итал.; рез. лат.)

Жанр p алгебраической кривой можно определить как $\max\{n-r\}$ для всех полных рядов g_n^r на C. Если доказано, что $n-r$ ограничено сверху (и неотрицательно), то легко показать, что существуют неспециальные ряды любого порядка $n\geqslant p$ и что для каждого специального ряда g_n^r имеют место соотношения $n\leqslant 2p-2$ и $r\leqslant p-1$. В сущности это путь, по которому следовал Севери в его «быстром методе» (Severi, Trattato di geometria algebrica, v. 1, parte 2, Zanichelli, Bologna, 1926, 929—938) и который был им переработан в одной заметке (Pont. Acad. Sci. Acta, 1951, 14, 143—152). Референт показал (Amer. J. Math., 1936, 58, 11—14), что на этой основе можно дать «внутреннее» доказательство теоремы Римана—Роха (т. е. доказательство, опирающееся исключительно на геометрию кривой C), если только известно, что существует хотя один специальный ряд максимального порядка $2p-2$ (и, значит, размерности $p-1$). (Краткое доказательство этого факта, или, точнее, прямой вывод известной «теоремы редукции» относительно данных рядов g_{2p-2}^{p-1} дан Севери в заключительном разделе настоящей работы). Автор дает внутреннее алгебро-геометрическое доказательство существования таких рядов. Его доказательство предполагает знание формулы Кэли—Брилля для числа неподвижных точек алгебраического соответствия с валентностью. Как показал Севери, формула Шуберта является «внутренним» следствием формулы Кэли—Брилля. Автору эти две формулы нужны для следующих целей: 1) установить тот факт, что p является (топологическим) жанром римановой поверхности для C (так как именно последний входит в формулу Кэли—Брилля); 2) показать, что некоторый g_{p+2}^2 имеет $p(p-1)/2$ нейтральных пар. Как только 2) доказано, то доказано и существование g_{2p-2}^{p-1}. (g_{p+2}^2 определяет плоскую кривую C' порядка $p+2$ и референту представляется, что данное автором доказательство неполно до тех пор, пока не доказано, что кривая C' имеет точно $p(p-1)/2$ различных двойных точек (а не просто их эквивалент в виде особенностей высшего типа). Представляется также, что доказательство еще зависит от редукции особенностей, или, точнее, того факта, что «производящий» g_{p+2}^2 имеет точно $p(p-1)/2$ нейтральных пар).

O. Zariski

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 343.

8169. **Об алгебраическом построении многообразия Пикара. I, II. Мацусака** (On the algebraic construction of the Picard variety. I, II. Matsusaka Teruhisa), Jap. J. Math. I, 1951 (1952), 21, 217—235; II, 1952 (1953), 22, 51—62 (англ.)

Автор дает подробное изложение построения Пикара многообразия P для алгебраического многообразия V, — построения, набросок которого был дан в предыдущей работе (Proc. Japan Acad., 1952, 28, 5—8; обозначения и определения в этом реферате те же, что и в Math. Revs. 1953, 14, 81). Статья I содержит следующие дополнительные детали: а) Критерии линей-

ной эквивалентности, использующие производящее 1-сечение C, доказаны как для произвольных дивизоров, так и для дивизоров из $G_a(V)$. б) Построение P проводится так: берется многообразие W, производящей точкой которого является точка Чжоу M ассоциированного многообразия $T(X)$ полной линейной системы, определенной производящим элементом X алгебраической системы S; на M имеет место нормальный закон композиции и, в силу теоремы А. Вейля, W бирационально эквивалентно абелеву многообразию P. в) Существует такое рациональное отображение ψ многообразия V в P, что P порождается $\psi(V)$, причем каждый элемент P является суммой не более чем $q(=\dim(P))$ элементов $\psi(V)$.

В статье II дается другое построение пикарова многообразия, протекающее параллельно методу Чжоу (РЖМат, 1955, 3373) построения якобиева многообразия кривой. Каждое «достаточно широкое» максимальное алгебраическое семейство S положительных дивизоров на V обладает следующими свойствами: каждый $D \in G_a(V)$ линейно эквивалентен дивизору вида $X' - X''$ ($X', X'' \in S$) и все содержащиеся в S полные линейные системы имеют одну и ту же размерность. Существует такое семейство S, которое содержит дивизор X_0, рациональный над наименьшим полем определения k для V. Тогда многообразие W, определенное как в работе I, допускает нормальный закон композиции (определенный соотношением $X \sim X' + X'' - X_0$), для которого сумма любых двух точек на W определяется однозначно. Вообще это не значит, что этот закон композиции «определен повсюду» (в техническом смысле), но соответствующий закон композиции на производной нормальной модели P многообразия W обладает этим свойством, и так как P — проективное многообразие, то оно абелево. Многообразие это изоморфно многообразию Пикара, определенному в статье I. Доказано следующее важное свойство: существует общее поле определения k' для P и V такое, что если a — точка P, то существует представляющий a дивизор $D \in G_a(V)$, который рационален над $k'(a)$; в силу этого свойства и его обращения, доказанного в работе I, пикарово многообразие определяется однозначно.

Статья II заканчивается построением многообразия Албанезе A для V. Здесь используется тот факт, что абелево многообразие, порожденное V (точнее — рациональным образом V), порождается также и производящим 1-сечением V и поэтому имеет ограниченную размерность. Пусть B — абелево многообразие максимальной размерности q, порожденное V, и f — соответствующее отображение V в B. Если (x_i) $(1 \leqslant i \leqslant g)$ — независимые производящие точки V над соответствующим общим полем определения K, то точка $z = \sum_{i=1}^{q} f(x_i)$ будет производящей точкой B и поле симметрических функций $K(x_1, \ldots, x_q)_s$ будет алгебраическим расширением конечной степени $d(B, f)$ поля $K(z)$. Если среди пар (B, f) мы возьмем пару (A, h), для которой $d(A, h)$ минимально, то A будет многообразием Албанезе для V, а h — каноническим отображением V в A: для каждого рационального отображения g многообразия V в абелево многообразие C существует такой гомоморфизм-трансляция g' A в C, что $g = g'oh$. P. Samuel

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 983.

8170. **Структура некоторых точек дирамации циклических кратных поверхностей (вторая заметка).** **Годо** (Structure de quelques points de diramation de surfaces multiples cycliques. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 1, 5—13 (франц.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 2613.

Изучается точка дирамации кратной поверхности 41-го порядка. Точка будет тройной для поверхности, касательный конус образован тремя плоскостями σ_α, τ_β, σ_β, вторая из них встречает каждую из остальных по прямой, первая и последняя, кроме тройной точки, общих точек не имеют. К этой точке на общей прямой σ_α, τ_β бесконечно близкой точкой будет двойная бипланарная точка, к которой бесконечно близка вторая двойная обыкновенная бипланарная точка. На прямой, общей τ_β и σ_β к тройной точке бесконечно близкой точкой будет двойная бипланарная точка, к которой бесконечно близка точка двойная коническая. Точка дирамации эквивалентна десяти рациональным кривым σ_α, ρ_{11}, ρ_{21}, ρ_{22}, ρ_{12}, τ_β, ω_0, ω_1, ω_2, σ_β, виртуального порядка 2, кроме τ_β, которая виртуального порядка 3. Каждая из этих кривых встречает предыдущую и последующую в точке, но не пересекает другие. Если рассматривать линейные системы $|C'|$, $|C''|$ ... на поверхности F, содержащей инволюцию, образом которой является кратная поверхность, то система $|C'|$ даст σ_α, τ_β, σ_β, вторая дает ρ_{11} и ρ_{12}, остальные кривые появляются одна за другой в последующих системах. С. С. Бюшгенс

8171. **О точках дирамации кратных поверхностей 23-го порядка. Тоне** (Sur les points de diramation des surfaces multiples d'ordre 23. Thonet Raymond), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 2, 119—127 (франц.)

Изучается методами Годо структура изолированных точек дирамации кратных циклических поверхностей 23-го порядка. Пусть F — алгебраическая поверхность, содержащая циклическую инволюцию 23-го порядка, имеющую только конечное число совпадающих точек; обозначим через Ф нормальную поверхность порядка n — образ этой инволюции, для которой точки дирамации изолированные. К совпадающей точке A инволюции, которая предполагается простой на F, присоединяются два числа α и β (индексы точки A в интервале (0, 23)) таких, что инволюция, наведенная в пучке касательных в точке A к F может быть представлена уравнениями

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \varepsilon^{\alpha-1}\mu, \quad \lambda' : \mu' = \varepsilon\beta^{-1}\lambda : \mu,$$

где ε примитивный корень 23-й степени из единицы. Возможны одиннадцать случаев (соответственно условию $\alpha\beta \equiv 1 \pmod{23}$):

$\alpha = 2$, $\beta = 12$; $\alpha = 3$, $\beta = 8$; $\alpha = 4$, $\beta = 6$; $\alpha = 5$, $\beta = 14$; $\alpha = 7$, $\beta = 10$; $\alpha = 9$, $\beta = 18$; $\alpha = 11$, $\beta = 21$; $\alpha = 13$, $\beta = 16$; $\alpha = 15$, $\beta = 20$; $\alpha = 17$, $\beta = 19$; $\alpha = \beta = 22$.

Через A' обозначается точка дирамации Ф, соответствующая точке A; касательный конус в точке дирамации A' распадается на два, на три или четыре рациональных конуса, и тогда точки дирамации называются соответственно первой, второй или третьей категории. В данном случае встречаются только точки двух первых категорий; автор дает подробное исследование точек второй категории и приводит указания результатов для точек первой категории. Точка дирамации A' индексов $\alpha = 9$, $\beta = 18$ оказывается четырехкратной для Ф, касательный конус распадается на конус 2-го порядка $|\sigma_\alpha|$, плоскость (τ_α), встречающую (σ_α) по образующей, и плоскость (σ_β), пересекающую (τ_α) по прямой; точке A' бесконечно близкая точка на общей прямой плоскостей τ_α и σ_β является двойной бипланарной. Точка дирамации A' индексов $\alpha = 13$, $\beta = 16$ пятикратна для Ф; касательный конус образован плоскостью σ_α, кубическим конусом (τ_α) и плоскостью (σ_β), каждая из двух плос-

костей встречает конус по образующей; бесконечно близкая к A' точка на общей прямой (τ_α) и (σ_β) является двойной конической точкой. Точка дирамации A' индексов $\alpha=15$, $\beta=20$ тройная трипланарная для Ф, три касательных плоскости σ_α, τ_α, σ_β, из них τ_α встречает две остальных по прямой; точке A бесконечно близки две последовательных двойных бипланарных точки и двойная коническая точка; первая двойная точка на общей прямой плоскостей (τ_α) и (σ_β). Точка дирамации индексов $\alpha=17$, $\beta=19$ тройная трипланарная для Ф; касательный конус образован тремя плоскостями σ_α, τ_α и σ_β, из них τ_α встречает две другие по прямой; бесконечно близкие к A' точки: двойная коническая на общей прямой двух плоскостей σ_α, τ_β и двойная бипланарная на прямой плоскостей τ_α, σ_β вместе с двойной конической. Затем для характеристики структуры оставшихся точек дирамации первой категории указывается (без подробного исследования), каким рациональным кривым эквивалентна каждая из них. С. С. Бюшгенс

8172. Класс рациональных поверхностей с рациональными нормальными асимптотическими. Терраччини (Una classe di superficie razionali iperspaziali con asintotiche razionali normali. Terracini Alessandro), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 263—270 (итал.)

Системой Γ рациональных нормальных кривых c^r в проективном S_r называют систему ∞^{r-1} таких кривых, проходящих через фиксированную точку O и имеющих там заданные соприкасающиеся пространства ω_k всех измерений $(1\leqslant k\leqslant r-1)$, если при этом ее можно рассматривать как предел при $M\to 0$ системы c^r, которая ведет себя одинаково как в точке O, так и в M.

Если вершина A^r симплекса отнесения совпадает с O, а грань $A^rA^{r-1}\ldots A^{r-k}$ $(1\leqslant k\leqslant r-1)$ совпадает с ω_k, то кривая c^r системы Γ имеет параметрические уравнения $\rho x_i=\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}a_{i-l}u^l$ $(0\leqslant i\leqslant r, a_0=1)$, где $a_1,\ldots,a_r$ — произвольные постоянные. При $r=3$ эти уравнения определяют асимптотические кривые линейчатой кубики Кэли.

Поверхность пространства S_r $(r>3)$, имеющая систему асимптотических из рациональных нормальных кривых системы Γ, определяется (с точностью до некоторой гомографии) параметрическими уравнениями: $\rho x_i=\sum_{l=0}^{E(i/2)}\binom{i}{2l}g_l u^{i-2l}v^l$ (*), где $l\geqslant 1$; $0\leqslant i\leqslant r$; $g_0=1$, $g_l=1,3,5\ldots(2l-1)$. Поверхность F_r имеет порядок $r(r-1)/2$. Пусть $r=2p$ или $r=2p+1$ (в зависимости от четности или нечетности r). Положив в уравнениях (*) $u=\text{const}$, получим параметрические уравнения линий c^p на F_r. Эти линии назовем директрисами поверхности F_r. F_r допускает непрерывную группу G_3 гомографии в себя, каждая из которых действует на параметры u, v согласно преобразованию типа $u'=hu+a$, $v'=h^2v+b$, где h, a, b — произвольные постоянные. G_3 действует транзитивно или среди асимптотических c^r, или среди директрис c^p. Дается конструкция поверхности F_r.

В. Т. Базылев

8173. Об узлах рациональных пространственных кривых, обладающих гармонической четверкой точек гипероскулирования. Бонера (Sui nodi delle curve gobbe razionali dotate di quaterna armonica di punti d'iperosculazione. Bonera Piero), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur. 1955, 88, № 1, 81—86 (итал.)

Рассматриваются пространственные рациональные кривые n-го порядка C^n, обладающие гармонической четверкой точек гипероскулирования (касание $(n-1)$-го порядка с соприкасающейся плотностью). Кривая C^n нечетного порядка $n>3$ свободна от узлов. Кривая C^n четного порядка $n\geqslant 4$ имеет по крайней мере $n-3$ или $n-2$ узла в зависимости от того, будет ли n кратно 4 или нет. Таким образом, кривая C^n с n, кратным 2, но не 3, имеет точно $n-3$ или $n-2$ узла в зависимости от того, будет ли n кратным 4 или нет. Кривая C^n с n, кратным 3 и 4, имеет не менее $n+1$ узлов. Кривая C^n с n, кратным 2 и 3, но не 5 и 7, имеет точно $n+1$ или $n-2$ узла в зависимости от того, будет ли n кратно 4 или нет.

С. П. Фиников

8174. Изучение кремонова преобразования комплексного S_8, выведенного из квадратичного преобразования тридуального S_2 с двумя совпадающими особыми точками. Фадини (Studio di una trasformazione cremoniana dell'S_8 complesso dedotta da una trasformazione quadratica dell'S_2 triduale con due punti eccezionali coincidenti. Fadini Angelo), Ricerca, Napoli, 1953, 4, № 3—4, 12—20 (итал.)

8175. Изучение кремонова преобразования S_8, выведенного из квадратичного преобразования тридуального S_2, имеющего три совпадающие особые точки. Фадини (Studio di una trasformazione cremoniana dell'S_8 dedotta da una trasformazione quadratica del' S_2 triduale avente i tre punti eccezionali coincidenti. Fadini Angelo), Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1953 (1954), (4) **20**, 324—334 (итал.)

8176. Бирациональные инволюционные преобразования в S_3, обладающие связкой прямых. Турри (Le trasformazioni birazionali involutorie in S_3 aventi una stella unita di rette. Turri Tullio), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1954, **24**, 28—35 (итал.)

8177. Бирациональные инволюционные преобразования пространства, ассоциированного линейному комплексу. Турри (Trasformazioni birazionali involutorie dello spazio associate a un complesso lineare. Turri Tullio), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1954, **24**, 36—45 (итал.)

8178. Инволюционные преобразования пространства, данные пересечением поверхностей четвертого порядка. Турри (Le trasformazioni involutorie dello spazio date dalle intersezioni di superficie di ordine quattro. Turri Tullio), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1954 (1955) **24**, 165—176 (итал.)

8179. Бирациональные инволюционные преобразования пространства. Турри (Le trasformazioni birazionali involutorie dello spazio. Turri Tullio), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1954 (1955), **24**, 256—265 (итал.)

8180. Касание вдоль кривой в алгебраическом четырехмернике. Баркер (Contact along a curve on an algebraic fourfold. Barker C. C. H.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 259—268 (англ.)

Продолжение предыдущей работы (РЖМат, 1956, 4809). В предположении, что объемлющий четырехмерник V_4 неприводимый и неособенный, устанавливаются соотношения эквивалентности для резидуальных пересечений различных многообразий, касающихся вдоль заданной кривой трехмерника и поверхности, двух трехмерников и поверхности, двух поверхностей, двух, трех и четырех трехмерников. В качестве приложения рассмотрен случай $V_4=S_4$. В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

8181. Задача Чезаро для линий на поверхности. Дмитриева Г. А., Сб. студ. работ Бурят-Монг. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 2, 3—8

Н. Г. Тугановым исследованы линии на поверхности (Докл. АН СССР, 1941, 30, № 5), геодезическое кручение, геодезическая кривизна и нормальная кривизна которых связаны некоторым линейным соотношением с постоянными коэффициентами. Автор называет эти линии линиями Туганова.

Рассматривается на поверхности линия λ и ее репер T ($\bar{r}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$), единичный вектор $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, исходящий из точки $A(a_1, a_2, a_3)$, где a_i, b_i — постоянные координаты относительно репера T. При движении репера T вдоль линии λ прямая $\bar{R} = \overline{OA} + v\bar{b}$ опишет линейчатую поверхность. Для линий на поверхности ставится задача, аналогичная задаче Чезаро для пространственных кривых: найти линии λ, вдоль которых эта прямая опишет торс, а также ребро возврата этого торса. Найдено натуральное уравнение класса линий, удовлетворяющих поставленной задаче, а также натуральное уравнение соответствующего ребра возврата. Исследованы частные случаи при различных значениях констант a, b, приводящие к тем или иным «линиям Туганова» или к известным линиям на поверхности — асимптотическим, геодезическим, линиям постоянной нормальной кривизны, линиям кривизны. М. А. Сабиров

8182. О линиях на поверхности, нормальная кривизна, геодезическая кривизна и геодезическое кручение которых связаны некоторым уравнением. Мокрищев К. К., Уч. зап. Ростовск. н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 95—102

С метрическим репером линии L на поверхности неизменно связывается прямая d, описывающая при движении репера линейчатую поверхность S. При этом каждая точка прямой d описывает некоторую кривую на поверхности S. Только для линий Туганова (эти линии имеют натуральное уравнение, линейное относительно инвариантов с произвольными постоянными коэффициентами — Туганов Н. Г., Докл. АН СССР, 1941, 30, № 5, 381—383) эти кривые являются ортогональными траекториями образующих. Если поверхность S развертывающаяся, то линия L характеризуется некоторым квадратичным относительно инвариантов натуральным уравнением с постоянными коэффициентами.

Примечание референта. Последняя задача более подробно рассмотрена в другой работе (реф. 8181). Р. Н. Щербаков

8183. Геодезические линии стока на местности. Браунер (Geodätische Fallinien einer Geländefläche. Brauner H.), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss Kl., 1955, 92, № 1—15, 171—175 (нем.)

Траектории, ортогональные к горизонталям поверхности, отображающей рельеф местности, называются линиями стока (Fallinien). Линия стока, обладающая одним из свойств: быть геодезической; быть линией кривизны; быть линией экстремальной крутизны; лежать в вертикальной плоскости, обладает также другими тремя свойствами.

Если тангенциальная плоскость цилиндра с произвольной направляющей и вертикальными образующими катится по цилиндру без скольжения, то произвольная линия этой плоскости описывает так называемую цилиндрическую резную поверхность Монжа (цилиндр может вырождаться в прямую, в том числе бесконечно удаленную). Доказывается, что такие поверхности являются единственными, все линии стока которых — геодезические. А. С. Смогоржевский

8184. О некоторых семействах геодезических. Сабан (Su alcune famiglie di geodetiche. Saban Giacomo), Rend. mat. e applic., 1954, 14, № 1-2, 115—124 (итал.)

Обобщая понятие интегрального инварианта Картан—Бехари (Cartan E., Bull. Soc. math. France, 1896, 24, 140—177; Behari Ram, Zucnow. Univ. stud., 1946, 18, 68—80), автор для семейства $\{C\}$ кривых $\vec{r} = \vec{r}(s, \lambda)$ (s — длина дуги, λ — параметр семейства), описывающих поверхность S, рассматривает интеграл по замкнутому контуру γ:

$$I = \oint_\gamma \frac{\partial \vec{r}(s, \lambda)}{\partial s} d\vec{r} = \oint_\gamma \frac{\partial \vec{r}(s, \lambda)}{\partial s} \frac{\partial \vec{r}(s, \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Если линии C — геодезические на S, то I не зависит от контура γ и является интегральным инвариантом семейства; он равен длине дуги геодезической C, высекаемой ортогональной траекторией семейства $\{C\}$, когда после обхода она будет пересекать их по второму разу. Условие $I = 0$ характеризует замкнутость ортогональной траектории. Эти соображения прилагаются к «замкнутым» линейчатым поверхностям, у которых $I = 0$ для семейства прямолинейных образующих. С. П. Фиников

8185. К конформной теории кривых. Гёц (Zur konformen Kurventheorie. Götz H.), Monatsh. Math., 1956, 60, № 3, 205—211 (нем.)

Рассматривая в трехмерном конформном пространстве C^3 кривую (класса $\geqslant 5$), заданную в пентасферических координатах, автор строит для нее специальный локальный конформный репер. Этот репер состоит из трех попарно ортогональных сфер A_1, A_2, A_3 и двух точек X и Y, подчиненных условиям

$$XX = YY = XA_i = YA_i = 0,\ XY = 1,\ A_iA_k = \delta_{ik}.$$

Сфера A_3 есть соприкасающаяся сфера кривой, A_2 ортогональная к ней сфера, содержащая круг кривизны, точка X — точка кривой; точка Y выбирается специальным образом, а именно: представляет собой точку пересечения сфер A_2, A_3 и B, где B — единая сфера, ортогональная A_3 и проходящая через точку X, а также через те характеристические точки сфер $A_2 + X$ и $A_2 - X$, которые лежат на A_3. При построении репера автор использует введенный им в § 2 аппарат «полуинвариантных производных». Названный репер используется для нахождения двух конформных инвариантов K и W, которые в силу некоторой аналогии с евклидовой теорией кривых автор называет, соответственно, кривизной и кручением. Геометрический смысл инварианта W вытекает из теоремы: $W = 0$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая была сферической. В заключение автор указывает соотношения

$$2Kds^2 = d\varphi_1^2$$

$$W^2ds^2 = d\varphi_3^2$$

В этих формулах ds есть конформный линейный элемент Либманна, $d\varphi_1$ — угол двух смежных нормальных сфер A_1, $d\varphi_3$ — угол двух смежных соприкасающихся сфер. В. А. Тихонов

8186. Об одном случае конформного отображения. Березман А. М., Уч. зап. Кемеровск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 1, 251—270

Методом внешних форм Картана решаются задачи: 1) определить пару поверхностей с установленным конформным отображением, переводящим линии кривизны в линии кривизны и 2) та же задача с добавоч-

ным требованием сохранения асимптотических линий. В первой задаче исходная поверхность произвольна, к ней может быть подобрана вторая с произволом четырех функций одного аргумента. Во второй задаче произвол пары поверхностей составляет пять функций одного аргумента. Как частный случай получается преобразование произвольной минимальной поверхности в любую минимальную. С. П. Фиников

8187. О паре конгруенций W, связанных с одной специальной сопряженной сетью. Бакес (Sur un couple de congruences W déduites d'un réseau conjugué spécial. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 5, 596—607 (франц.)

Пусть $(O_1)_{uv}$ — сопряженная сеть с равными точечными и касательными инвариантами и эквивалентными соответствующими уравнениями Мутара. Пусть O_3 и O_4 — вторые фокусы касательных к линиям $(O_1)_u$ и $(O_1)_v$. Применяя метод Демулена (Demoulin A., C. r. Acad. sci., 1909, 168, 460), автор приходит к результату: прямая d пересечения плоскостей, касательных к кривым $(O_1)_u$ и $(O_1)_v$ (к фокальным поверхностям (O_3), (O_4)), и прямая d', соединяющая фокусы O_3 и O_4, образуют расслояемую пару конгруенции W, причем асимптотические на фокальных поверхностях этих конгруенций соответствуют асимптотическим на поверхности (O_1). К. Н. Тихоцкий

8188. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей. Бакельман (Geometria diferențială a suprafetelor netede neregulate. Bakelman I. I.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1957, 11, № 1, 5—39 (рум.)

См. РЖМат, 1957, 6677.

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

8189. Тензорное исчисление и функциональные операторы. Налли (Calcolo tensoriale ed operazioni funzionali. Nalli Pia), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 117—122 (итал.)

Иллюстрируется идея автора (РЖМат, 1956, 7609) об аналогии между тензорами и линейными функциональными операторами.

Двухвалентному тензору T_i^j сопоставляются операторы, определяемые формулами

$$\bar{\psi}(r) = \int_a^b F(k, r)\,\psi(k)\,dk + \int_R G(i, j; r)\,Q(i, j)\,didj, \qquad (1)$$

$$Q(r, s) = \int_a^b M(k; r, s)\,\psi(k)\,dk + \int_R V(i, j; r, s)\,Q(i,j)\,didj, \qquad (2)$$

где $\psi(i)$ — определена в интервале (a, b), $Q(i, j)$ — в $R = (a, b) \times (a, b)$ и функции F, G, M удовлетворяют условиям

$$\int_a^b F(k, r)\,dk = 1, \quad \int_a^b F(k, r)\,dr = 1, \quad \int_a^b G(i, j; r)\,dr = 0,$$

$$\int_a^b M(k; r, s)\,dk = 0 \qquad (3)$$

Уравнения (1), (2) имеют много общего с уравнениями преобразования компонент тензора T_i^j, например, $\int_a^b \psi(k)\,dk$ есть инвариант относительно преобразований (1) (2), подобно тому, как $\sum_{i=1}^n T_i^i$ является инвариантом тензора. Ставится вопрос об операторах обратных (1), (2). Ю. Е. Пензов

8190. О функциональном тензоре, связанном с дугой. Кацурада (On the functional tensor attached to an arc. Katsuradа Yoshie), Tensor, 1954, 4, № 1, 16—27 (англ.)

Рассматривается многообразие, элемент которого — дуга в n-мерном пространстве:

$$x^i = x^i(t), \qquad = 1, \ldots, n,$$

причем функции $x^i(t)$ допускают разложение

$$x^i(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\,x_0^{(\alpha)i}\,(t - t_0)^\alpha. \qquad (1)$$

Совокупность величин $x^{(\alpha)i}$ ($x^{(0)i} = x^i$) называется экстючкой. Крейг (Craig H. V., Amer. J. Math., 1937, 59. 764—777) ввел понятие экстензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}$, связанного с экстючкой. Используя экстензор $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, \infty$) в начальной экстючке $x_0^{(\alpha)i}$ дуги (1), автор определяет новое понятие C-тензора ${}_c T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, связанного с дугой (1):

$${}_c T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\,T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}\,(u - u_0)^\alpha,$$

где ряд абсолютно сходится при $0 \leqslant u - u_0 \leqslant \rho$. Частным случаем C-тензора является аналитическое тензорное поле $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ вдоль дуги (1). Доказывается ряд простых теорем из алгебры C-тензоров. В одной из предыдущих работ (J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1951, 12, 17—28) автор ввел понятие продолженных вдоль дуги компонент связности $\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k}$. С их помощью строится экскovариантный дифференциал экстензора $\delta^* T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}$, а затем определяется ковариантный дифференциал C-тензора (2):

$$\delta^{\Delta}_{C} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\,\delta^* T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}\,(u - u_0)^\alpha$$

(абсолютная сходимость ряда в том же интервале $0 \leqslant u - u_0 \leqslant \rho$). Ковариантный дифференциал C-тензора является линейным оператором. Затем вводится понятие производной Ли $XT^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}$ от экстензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}$, с ее помощью определяется производная Ли от C-тензора (2):

$$X^{\Delta}_{C} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\,XT^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}{}^{\alpha}$$

(абсолютная сходимость в том же интервале). Для аналитического тензорного поля, заданного вдоль дуги, введенные ковариантный дифференциал и производная Ли совпадают с обычными. А. П. Широков

8191. К теории обобщенных смешанных экстензоров и функциональных тензоров, связанных с подпространством. Кацурада (On a theory of generalized crossed extensors and the functional tensors attached to a subspace. Katsuradа Yoshie), Tensor, 1956, 5, № 3, 143—163 (англ.)

В n-мерном дифференцируемом многообразии заданы m-мерные поверхности класса Q ($Q \geqslant M$): $x^i = x^i(u^{i'})$, $i = 1, \ldots, n$; $i' = 1, \ldots, m$. Обозначая $\dfrac{\partial^k x^i}{\partial u^{i'_1} \ldots \partial u^{i'_k}} = P^i_{i'(K)}$, ($K \leqslant M$), автор рассматривает многообразие $S_n(M, m)$ поверхностных элементов M-го порядка $\{x^i(u^{i'}), P^i_{i'(1)}, \ldots, P^i_{i'(M)}\}$. В этом многообразии вводится понятие смешанного экстензора (crossed extensor) $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q i'(\alpha)}$, являющегося обобщением скрещенного экстензора Крейга для $S_n(M, 1)$ (Craig H. V., Vector and tensor analysis, 1943, 266). Предполагая исходное многообразие пространством аффинной связности, автор вводит операцию эксковариантного дифференцирования. Строится также производная Ли, дающая в применении к скрещенному экстензору скрещенный экстензор того же рода. Затем, по аналогии с предыдущей работой (реф. 8190), вводится понятие функционального тензора (S-тензора) ${}_s T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, связанного с подпространством. Изучаются алгебраические и дифференциальные свойства S-тензоров (строится ковариантный дифференциал и производная Ли от S-тензора). А. П. Широков

8192. О параллельном перемещении подпространств в пространстве аффинной связности. Кацурада (On the parallel displacement of subspaces in an affinely connected space. Katsurada Yoshie), Tensor, 1953, 3, № 1, 1—12 (англ.)

Если g_{ij} — метрический тензор риманова V_n, то в каждой точке кривой $x^i = x^i(t)$ класса дифференцируемости $Q \geqslant M$ определены метрический экстензор

$$g^M_{\alpha i \beta j} = \binom{M}{\alpha\beta} g^{(M-\alpha-\beta)}_{ij},$$

$$\binom{M}{\alpha\beta} = \begin{cases} \dfrac{M!}{\alpha!\,\beta!\,(M-\alpha-\beta)!}, & \text{если } M \geqslant \alpha+\beta, \\ 0, & \text{если } M < \alpha+\beta, \end{cases}$$

и продолженные символы Кристоффеля

$$\overset{M}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k} = \left(\frac{1}{2}\right) g^{\alpha i \delta l}_M \left(\frac{\partial g^M_{\beta j \delta l}}{\partial x^{(\gamma)k}} + \frac{\partial g^M_{\delta l \gamma k}}{\partial x^{(\beta)j}} - \frac{\partial g^M_{\beta j \gamma k}}{\partial x^{(\delta)l}} \right) =$$

$$= \binom{\alpha}{\beta\gamma} \Gamma^{i(\alpha-\beta-\gamma)}_{jk}.$$

Рассматривается правильное семейство кривых в некоторой области; пусть две кривые семейства C_0, $\tilde{C}_0$, проходящие через две бесконечно близкие точки $P_0(x^i_0)$, $\tilde{P}_0(\tilde{x}^i_0)$, представлены в виде

$$x^i(t) = x^i_0 + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} x^{(\alpha)i}_0 (t - t_0)^\alpha,$$

$$\tilde{x}^i(t) = \tilde{x}^i_0 + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \tilde{x}^{(\alpha)i}_0 (t - t_0)^\alpha.$$

Тогда дуги $C^{(M)}_0$ и $\tilde{C}^{(M)}_0$:

$$x^i(t) = x^i_0 + \sum_{\alpha=0}^{M} \frac{1}{\alpha!} x^{(\alpha)i}_0 (t - t_0)^\alpha,$$

$$\tilde{x}^i(t) = \tilde{x}^i_0 + \sum_{\alpha=0}^{M} \frac{1}{\alpha!} \tilde{x}^{(\alpha)i} (t - t_0)^\alpha$$

имеют в точках P_0 и $\tilde{P}_0$ касание M-го порядка с C_0 и $\tilde{C}_0$. Эти дуги параллельны, если

$$\tilde{x}^{(\alpha)i}_0 = x^{(\alpha)i}_0 - \Gamma^{(\alpha-1)i}_{\beta j \gamma k} x^{(\beta+1)j}_0 dx^{(\gamma)k},$$

$$dx^{(\gamma)k} = \tilde{x}^{(\gamma)k}_0 - x^{(\gamma)k}_0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M.$$

При $M \to \infty$ автор определяет параллелизм дуг C_0 и $\tilde{C}_0$ ($\tilde{C}_0$ получены параллельным перемещением C_0 из точки P_0 в точку $\tilde{P}_0$). В случае евклидова пространства и при $M = \infty$ две параллельные дуги получаются друг из друга трансляцией. Подобные же построения переносятся и на m-мерные поверхности пространства аффинной связности L_n. А. П. Широков

8193. Об экстензорах в пространстве не целого порядка. Сасаяма (On extensors in the space of non-integral order. Sasayama Hiroyoshi), Tensor, 1953, 3, № 1, 53—64 (англ.)

Распространяется понятие экстензора на случай, когда порядок не является целым числом. Автор опирается на дифференцирование дробного порядка, ссылаясь на работу Фудживара (Fudjiwara M., Bibun—Sekibun—Gaku. I. Uchida Rōgakuba, Tokyo, 1934, 556—571), с которой референту не удалось познакомиться, но которая, по-видимому, близка по результатам к исследованиям А. В. Летникова (1868—1888) (о них см. Шостак, Р. Я. Историко-матем. исследования, вып. 5, М., Гостехиздат, 1952, 165—238).

Обобщение не касается числа измерений исходного пространства, а относится специально к порядку μ линейного элемента (μ — не целое вещественное число, меньшее единицы). Линейный элемент (line element) порядка μ определяется вдоль аналитической кривой $x^i = x^i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) в пространстве X_N как бесконечный ряд производных от функций $x^i(t)$ порядков $\mu - m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$):

$$x^{(\mu)i}, \quad x^{(\mu-1)i}, \quad x^{(\mu-2)i}, \ldots$$

т. е. порождает бесконечномерное пространство. Если допустить еще преобразования параметра t, то получим внутренний (intrinsic) или криволинейный элемент (curve element) порядка μ. Множество линейных (соответственно криволинейных) элементов порядка μ образует пространство, обозначаемое $X^{(\mu)}_N$ (соответственно $\overset{\mu}{\varkappa}_N$). Допустимые преобразования координат в X_N $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ определяются функциями $\bar{x}^i(x^j)$, взаимно однозначными регулярно аналитическими в надлежащей области, содержащей 0, имеющими непрерывные производные порядка $\mu - m$ и m для всех $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ и разложимыми в этой области вместе с их частными производными в равномерно сходящиеся ряды Тейлора. Тогда из соответствующих разложений для $\bar{x}^i$ после дифференцирования по t получаются, если воспользоваться обобщенной формулой Лейбница для производной дробного порядка от произведения, формулы продолженного до порядка μ преобразования координат

$$\bar{x}^{(\alpha)i} = \bar{x}^{(\alpha)i}(x^{(\beta)i}) \qquad (1)$$

$$(\alpha = \mu, \ \mu - 1, \ldots; \qquad \beta = \alpha, \ \alpha - 1, \ldots),$$

где функции, стоящие в правой части, являются определенными целыми рациональными функциями бесконечного множества аргументов $x^{(\alpha-m)j}$ и $x^{(m)j}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Таким образом новый линейный элемент $\bar{x}^{(\alpha)i}$ μ-го порядка является функцией старого.

Установив выражения для производных $\frac{\partial \overline{x}^{(\alpha)i}}{\partial x^{(\beta)j}}$ и их свойства, автор определяет экстензоры в пространстве $X_N^{(\mu)}$ как тензоры относительно преобразований (1). Так, например, эксконтравариантный эксвектор $V^{\alpha i}$ ($\alpha = \delta, \delta-1, \ldots$) степени (grade) δ характеризуется следующим законом преобразования компонент:

$$\overline{V}^{\alpha i} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \overline{x}^{(\alpha)i}}{\partial x^{(\alpha-m)j}} V^{\alpha-m,\, j},$$

в котором правая часть представлена в виде суммы предполагаемого сходящимся бесконечного ряда. В случае эксковариантного эксвектора $W_{\alpha i}$ ($\alpha = \delta, \delta-1, \ldots$) имеется существенное различие, а именно формула преобразования его компонент содержит конечное число членов

$$\overline{W}_{\alpha i} = \sum_{m=0}^{\delta-\alpha} \frac{\partial x^{(\alpha+m)j}}{\partial \overline{x}^{(\alpha)i}} W_{\alpha+m,j}.$$

Аналогичному обобщению подвергаются понятия смешанных (скрещенных) экстензоров или псевдоэкстензоров и якобиановых экстензоров (РЖМат, 1956, 8321).

Введено два вида контрактирований. Первый вид применяется в случае двух эксвекторов, один из которых имеет целую степень (или бесконечную), а другой — не целую. Второй вид применяется в случае двух эксвекторов одинаковой не целой степени. Эти контрактирования действительны также в случае смешанных и (с соответственными изменениями) якобиановых экстензоров. Б. Л. Лаптев

8194. Об обобщенных коэффициентах аффинной связности дробного порядка в пространстве с кручением. Сасаяма (On the extended affine connection parameters of fractional order in the space with torsion. Sasayama Hiroyoshi), Tensor, 1954, 3, № 3, 144—166 (англ.)

Составив вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ класса μ (не целого < 1) производные дробного порядка по t от коэффициентов $\Gamma'_{jk}(x^i)$ аффинной связности с кручением, автор строит путем линейного комбинирования этих производных объект Γ^{Ai}_{BjCk}, который представляет собой распространение экстензорных коэффициентов связности $\overset{M}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{bjck}$ порядка M, введенных Кацурада на базе точечного пространства симметрической аффинной связности (Katsurada Y., J. Fac. Hokkaido Univ., 1951, 12, 19—28), на случай пространства общей аффинной связности (с кручением) и экстензоров дробного порядка, рассмотренных автором в предшествующих работах (РЖМат, 1956, 4065 и реф. 8193). Закон преобразования компонент объекта в случае целых индексов A, B, C получает тот же вид, что и у Кацурада.

В дальнейшем автор переносит результаты Кацурада, относящиеся к экстензорной связности и экстензорному ковариантному дифференцированию, на рассматриваемый случай пространств не целого порядка, опираясь на свои, цитированные выше, работы. Он получает обобщенные градиент и вихрь. Вводится для эксвекторов понятие «иметь одинаковое обобщенное направление» и показывается, что обычная геодетика в базисном пространстве может быть получена как кривая, для которой соответствующая экстензорная кривая обладает тем свойством, что вдоль нее обобщенный касательный эксвектор сохраняет свое обобщенное направление.

В выражении обобщенной эксковариантной производной экстензора члены, соответствующие целому индексу, имеют оригинальное строение. Далее построены тензоры кручения и кривизны и найдены их выражения как через экстензорные коэффициенты связности, так и через производные дробного порядка от тензоров кручения и кривизны базисной связности. Установлены тождества, связывающие экстензоры кривизны и кручения, выведены обобщенные тождества Риччи и Бианки. Б. Л. Лаптев

8195. О пространстве линейных элементов дробного порядка с производными метрическими экстензорами. Сасаяма (On the space of line-elements of fractional order with derived metric extensors. Sasayama Hiroyoshi), Tensor, 1954, 4, № 2, 91—10 (англ.)

Рассматривая экстензоры, т. е. тензоры продолженной группы дифференцируемых преобразований с матричными индексами (РЖМат, 1954, 1802) и их обобщение, которое получается при распространении этого понятия на пространство дробного порядка при помощи дробного дифференцирования (РЖМат, 1955, 952), автор рассмотрел эксковариантное дифференцирование для пространства линейных элементов целого порядка с кручением (РЖМат, 1957, 8194), а в рецензируемой статье рассматривает метрические экстензоры дробного порядка.

Если симметрические эксковариантные и эксконтравариантные экстензоры дробного порядка μ, отвечающие компонентам g_{ij} и g^{ij} метрического тензора риманова многообразия V_n, обозначить соответственно ${}_\mu G_{A_\ell B_j} \equiv G_{(A)\ell(B)j}$ и ${}_\mu G^{A_\ell B_j} \equiv G^{(A)\ell(B)j}$, то при помощи экстензорного символа Кронекера $\delta^{(A)\ell}_{(B)j}$ устанавливаются соотношения, аналогичные тем, которые связывают g_{ij}, g^{ij} и δ^j_i в V_n: $({}_\mu G^{A_\ell B_j} {}_\mu G_{B_j C_k} = \delta^{(A)\ell}_{(C)k}$ и т. д.), которые помогают доказать теоремы: 1) расширенное внутреннее произведение двух экстензоров второго рода всегда равно нулю; 2) экстензор второго рода всегда минимальный; 3) условием того, чтобы два неминимальные эксвектора были ортогональны, является то, чтобы их расширенное внутреннее произведение (произведение со свертыванием) равнялось нулю и др.

Далее вводятся параметры $\Gamma^{\ell}_{B_j C_k}$, обобщающие для пространства экстензоров коэффициенты связности и, пользуясь ими, эксковариантное и эксконтравариантное дифференцирования. Доказывается обобщение известной леммы Риччи в V_n: эксконтра — и эксковариантные произвольные фундаментальных экстензоров ${}_\mu g_{A_\ell B_j}$ и ${}_\mu g^{A_\ell B_j}$ равны тождественно нулю.

Вводится эксковариантный тензор кривизны ${}^\mu R_{A_\ell B_j C_k D_h}$, для которого выводятся тождества, повторяющие по смыслу алгебраические тождества для тензора кривизны V_n, а также получается обобщение тождеств Бианки: ${}^\mu R_{A_\ell B_j C_k D_h; E_e} + {}^\mu R_{A_\ell C_k D_h E_e B_j} + {}^\mu R_{A_\ell D_h E_e B_j; C_k} = 0$. Пользуясь свертыванием с экстензором ${}^\mu g_{A_\ell B_j}$, автор вводит экстензор Риччи и, при следующем свертывании, скалярную кривизну ${}^\mu R$. Дается понятие римановой кривизны в направлении двух эксвекторов и средней кривизны. А. З. Петров

8196. Об обобщенных пространствах с метрикой дробного порядка. Сасаяма (On generalized spaces with metric of fractional order. Sasayama Hiroyoshi), Tensor, 1954, 4, № 2, 107—121 (англ.)

Рассматривая n-мерные пространства Кавагути порядка m, для которых фундаментальная форма задается как скалярная функция компонент $x^{(a)i}$ линейного элемента ограниченного целого порядка m и параметра кривой t (Kawaguchi A., Proc. Imp. Acad.

Tokyo, 1936, **12**, 152—155) и, с другой стороны, используя понятия компоненты линейного элемента дробного порядка $p\,(<1)$ (РЖМат, 1955, 952) и теории пространств линейных элементов дробного порядка с метрическими экстензорами (реф. 8195), автор изучает пространства, в которых длина дуги кривой задается скалярной функцией ${}^{\mu}F$ параметра t кривой и компоненты линейного элемента будут дробными порядка $\mu\,(0<\mu<1)$. Частным случаем таких многообразий будут как пространства Кавагути, так и все пространства, образующие непрерывное семейство, которое при μ, стремящемся к единице, приводятся к финслеровым пространствам. Ставится задача — получить основу для развития дробной дифференциальной геометрии в таком пространстве. Используемые для исследования ряды предполагаются сходящимися в соответствующих точках.

Рассматривается вариационная задача дробного порядка, отвечающая условию Цермело, вводятся векторы Эйлера двух родов и обобщения векторов Синга трех родов. Дается определение параллелизма в случае метрического пространства и обобщается понятие внутренней производной Крейга и Кавагути. А. З. Петров

8197. **О группе вращений в R_6.** **Вауде** (On the group of rotations in R_6. Woude W. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 4, 367—370; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 367—370 (англ.)

Известно, что группа D_3 вращений шестимерного евклидова пространства R_6 изоморфна группе A_3 движений унитарного пространства K_3. Автор рассматривает в K_3 преобразования

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ x_2' &= -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \\ x_3' &= x_3\cos\psi + x_4\sin\psi \\ x_4' &= -x_3\sin\psi + x_4\cos\psi \end{aligned}$$

и показывает, что соответствующие матрицы преобразований R_6 имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) & 0 & & & \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos(\varphi-\psi) & \sin(\varphi-\psi) & 0 \\ & & & -\sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

А. С. Феденко

8198. **Теорема об автоморфизмах проективного алгебраического многообразия. Приложение к теории расслоенных пространств и к гипотезе Игусы.** **Бланшар** (Un théorème sur les automorphismes d'une variété algébrique projective. Application aux fibrés et à une conjecture d'Igusa. Blanchard André), C. r. Acad. sci, 1955, **240**, № 23, 2198—2201 (франц.)

V — компактное кэлерово многообразие; F — главное расслоенное пространство с группой G^*, базисом V, определенным посредством открытых U_j и функций f_{jk} (mod 1); g-автоморфизмы V, принадлежащие G^0-связной группе автоморфизмов V. Имеют место две теоремы:

1. Если Φ — конечная подгруппа группы переносов многообразия Альбанезе $A\,(V)$ проективного алгебраического многообразия V и N_Φ — обратный образ Φ на G^0, связная группа автоморфизмов V, то существует продолжение V в комплексном проективном пространстве такое, что автоморфизмы, принадлежащие N_Φ, порождаются гомографиями.

2. Обратно, если $E\,(B, F)$ — компактное, комплексно-аналитическое, расслоенное пространство с базой B, слоем F и связной структурной группой, то для того, чтобы E было проективным алгебраическим многообразием, необходимо и достаточно одновременного выполнения условий: 1) B и F должны быть проективными алгебраическими многообразиями; 2) $b_1(E) = b_1(B) + b_1(E)$; 3) многообразие Альбанезе $A\,(E)$ абелево.

Гипотеза Игусы (Igusa), что неалгебраическое кэлерово многообразие с точностью до расширения является расслоенным пространством в комплексных торах над алгебраическим многообразием, опровергается построенным примером. Теорема 2 дает основание автору поставить более слабое утверждение: существует ли неалгебраическое кэлерово многообразие, у которого многообразие Альбанезе было бы алгебраическим?

С. П. Фиников

8199. **Группы голономии и когомология римановых многообразий.** **Лихнерович** (Holonomy groups and cohomology for the Riemannian manifolds. Lichnerowicz André), Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 1953 (1954), **5**, № 1, 9—20 (англ.)

Первая часть статьи содержит краткое, но ясное изложение основных фактов, относящихся к группам голономии риманова многообразия. В части 2 рассматриваются гармонические формы на компактном ориентированном многообразии V_m. Если F — k-форма на V_m, то для каждого $h\,(h=0, 1\ldots k)$ автор определяет оператор $K_h(F)$ на кольце дифференциальных форм так, что p-форма φ переводится в $(p+k-2h)$-форму $K_h\varphi$, если $p\geqslant h$ и в нуль, если $p<h$. Основная теорема этой части следующая: если F имеет нулевую ковариантную производную (и в этом случае она гармоническая), то $K_h\varphi$ будет гармонической, если φ гармоническая. В частности, так как $K_0\varphi = F\wedge\varphi$, то внешнее произведение гармонической формы на F есть форма гармоническая. Часть 3 дает два приложения: (1) если V_m имеет k линейно-независимых форм с нулевой ковариантной производной, или что то же, если однородная группа голономии будет $SO(m-k)$, то полином Пуанкаре для V_m делится на $(t+1)^k$; (2) если V_m допускает внешнюю квадратичную форму $F_{ij}dx^i\wedge dx^j$ с нулевой ковариантной производной и с $F_{ij}F_{kl}g^{jl} = g_{ik}$, т. е. если V_m есть псевдокэлерово многообразие, то однородная группа голономии будет подгруппой действительного представления группы $U\,(n)$ и обратно. W. M. Boothby

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 284

8200. **Симметрические пространства с простыми некомпактными фундаментальными группами.** **Феденко А. С.**, Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 6, 1026—1028

Опираясь на результаты Э. Картана (Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., 1949) и Ф. И. Карпелевича (РЖМат, 1956, 5759), автор пришел к классификации симметрических пространств с простыми некомпактными фундаментальными группами. В статье перечислены модели симметрических пространств этого класса для простых некомпактных групп основных серий: ${}^{I}A_n$, $\widetilde{D}_l$, ${}^{II}C_n$. Вместе с имеющимися результатами (РЖМат, 1956, 8247) это дает полное решение вопроса о классификации симметрических пространств, для которых фундаментальные группы являются вещественными формами простых классических групп (обозначим для краткости этот класс пространств L^C). Она приводит автора к следующим выводам: а) все пространства L^C

являются неприводимыми римановыми пространствами, б) L^C распадаются на два подкласса, в один из которых входят пространства с метрикой нулевой сигнатуры, а в другой — все остальные. При этом последние располагаются парами, имеющими общую стационарную подгруппу, но разные фундаментальные группы, принадлежащие одной комплексной структуре.

В заключение приводится полный перечень пространств L^C, которые являются расслоенными.

Н. С. Синюков

8201. О топологии многообразия соединенных пар точек алгебраического многообразия. Деннистон (On the topology on the joined pointpairs of an algebraic variety. Dennistoun R. H. F.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 38, 213—223 (англ.; рез. итал.)

Пусть V — неприводимое m-мерное односвязное рациональное многообразие без особенностей, лежащее в n-мерном (комплексном) проективном пространстве. При некоторых предположениях о многообразии V (выполняющихся во всех интересных случаях и состоящих в основном в требовании, чтобы многообразие V обладало базисом гомологий, составленным из алгебраических подмногообразий) автор рассматривает многообразие $V*V$, точками которого являются тройки вида (P, Q, R), где P и Q — точки многообразия V, а R — проходящая через них прямая (если $P=Q$, то требуется дополнительно, чтобы прямая R касалась многообразия V). Многообразие $V*V$ является неприводимым $2m$-мерным алгебраическим многообразием без особенностей, допускающим естественное расслоение на подмногообразия вида $O*V$ (состоящие из троек вида (O, Q, R), где O — фиксированная точка многообразия V). Базой этого расслоения служит многообразие V. Слои $O*V$ не имеют кручения, а их числа Бетти $R_p(O*V)$ следующим образом выражаются через числа Бетти $R_p(V)$ многообразия V:

$$R_p(O*V)=\begin{cases} R_p(V) \text{ если } p \text{ нечетно или } p=0,\ 2m \\ R_p(V)+1 \text{ если } p \text{ — четно и } 0<p<2m \end{cases}$$

Что же касается групп гомологий всего многообразия $V*V$, то они изоморфны группам гомологий прямого произведения $V\times(O*V)$ (следовательно, в частности, многообразие $V*V$ не имеет кручения). Не ограничиваясь этим формальным результатом, автор явным образом строит некоторый базис гомологий многообразия $V*V$ (что, впрочем, необходимо ему для доказательства сформулированного выше общего утверждения). М. М. Постников

8202. О расслоении однородных пространств. Карпелевич Ф. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 3, 131—138

Доказывается, что любое однородное пространство $M=G/H$, где G и H — полупростые группы, может быть расслоено, причем слоем является евклидово пространство, а базой — однородное пространство K/P, где K и P — максимальные компактные подгруппы групп G и H. Это расслоение однородно, т. е. базу можно рассматривать вложенной в M, и тогда движения базы будут индуцироваться некоторыми движениями пространства M, сохраняющими слои. Проекция на базу также порождается движениями в M.

Доказывается также, что пространство G/H гомоморфно некоторому обобщенному грассманову пространству (которым автор называет множество всех поверхностей S в симметрическом пространстве E неположительной кривизны, которые получаются движениями из какой-либо одной вполне геодезической поверхности S_0; это множество $\{S\}$ является однородным пространством с той же группой движений G, что и само E, стационарная подгруппа состоит из всех тех движений группы G, которые переводят S_0 в себя). При этом гомоморфизмом двух однородных пространств M и M' с группой движений G называется такое отображение φ: $M\to M'$, для которого $g\varphi(m)=\varphi(gm)$ при любых $m\in M$ и $g\in G$.

А. С. Солодовников

8203. Комплексные косые произведения с абелевой группой. Холи (Complex bundles with Abelian group. Hawley N. S.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 65—82 (англ.)

Изучаются некоторые виды расслоенных пространств с коммутативной группой G над комплексным многообразием V. Коротко изложены основные понятия теории Кодаира—Спенсера (РЖМат, 1954, 3273, 3274), которые затем используются автором.

Прежде всего рассматривается случай, когда $G=T_\omega=T$ — «эллиптическая» группа, образованная факторизацией аддитивной группы C комплексных чисел по ее дискретной подгруппе Δ_ω, порожденной парой $\omega=(\omega_1, \omega_2)$ комплексных чисел, отношение которых ω_1/ω_2 не является действительным. Пусть C^* — мультипликативная группа комплексных чисел и e — гомоморфизм C на C^*, осуществляемый экспоненциальным отображением: $e(x)=e^{2\pi ix}$, пусть далее ω — естественный гомоморфизм $C\to T$. Можно построить (хотя и неоднозначно) гомоморфизм $\sigma: C^*\to T$ такой, что $\omega=\sigma e$. Этот гомоморфизм индуцирует отображение C^*-произведений (т. е. произведений с группой C^*) в T-произведения. В частности, каждому дивизору соответствует некоторое (главное) T-произведение. Устанавливается, что, вообще говоря, не любое T-произведение может быть получено из C^*-произведения при указанном отображении. С другой стороны, некоторым дивизорам могут соответствовать одинаковые T-произведения. Это дает возможность разбить дивизоры на классы эквивалентности (ω-эквивалентность). Выводится критерий ω-эквивалентности дивизоров, из которого, в частности, следует, что если два дивизора на V гомологичны, то при некотором ω они ω-эквивалентны.

Далее рассматриваются многообразия Хопфа $\mathfrak{H}^{n+1}$, полученные факторизацией комплексного пространства $(z_0, \ldots, z_n)$ (без начальной точки $(0, \ldots, 0)$) с помощью группы, порожденной отображением μ, переводящим $(z_0, \ldots, z_n)$ в $(2z_0, \ldots, 2z_n)$. Известно, что многообразия Хопфа не являются келеровыми и, следовательно, алгебраическими (при $n>0$). Автор показывает, что $\mathfrak{H}^{n+1}$ можно рассматривать как T-произведение над комплексным проективным пространством S_n, причем любая часть $\mathfrak{H}^{n+1}$ над подмногообразием (размерности >0) S_n также не является алгебраической.

Строится ряд примеров некелеровых многообразий. Так, многообразия Вана (односвязные компактные комплекснооднородные многообразия, РЖМат, 1956, 3302) являются келеровыми (а в этом случае алгебраическими и даже рациональными) тогда и только тогда, когда их эйлерова характеристика отлична от нуля.

Наконец, оказывается возможным над любым комплексным многообразием построить (притом континуальным множеством аналитически различных способов) некелерово косое произведение. И. З. Розенкноп

8204. Главные косые произведения с одномерной тороидальной группой. Кобаяси (Principal fibre bundles with the 1-deminsional toroidal group. Kobayashi Shoshichi), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 29—45 (англ.)

Пусть $P(M, T^1)$ — совокупность главных косых произведений над дифференцируемым многообразием M (класса C^∞) с группой T^1 (окружность). Множество $P(M, T^1)$ образует аддитивную группу (сложению элементов отвечает перемножение соответствующих координатных преобразований). Прежде всего рассматриваются три возможных аспекта при изучении этой группы.

1) С точки зрения дифференциально-геометрической устанавливается гомоморфизм $P(M, T^1)$ на $H^2(M, Z)_b$ (где $H^2(M, Z)_b$ обозначает образ $H^2(M, Z)$ при естественном отображении в $H^2(M, R)$, относящий каждому $P \in P(M, T^1)$ его характеристический класс. Если P принадлежит ядру этого гомоморфизма, то в P существует связность с тривиальной ограниченной группой голономии. Если первая группа гомологий M с целыми коэффициентами нулевая ($H^1(M, Z) = 0$), то гомоморфизм является изоморфизмом.

2) С точки зрения теории пучков выводится более сильный результат (Серр): $P(M, T^1)$ изоморфно $H^2(M, Z)$.

3) С точки зрения гомотопической теории доказывается, что если M односвязно, то $P(M, T^1)$ изоморфно $\mathrm{Hom}(\pi_2(M), Z)$. Изоморфизм задается отнесением каждому $P \in P(M, T^1)$ граничного оператора Δ: $\pi_2(M) \to \pi_1(T_1) = Z$ (в точной гомотопической последовательности произведения P).

Далее доказывается теорема о пучке P/G_m, получаемом при факторизации T^1 по ее циклической подгруппе G_m. Тогда P/G_m изоморфно $m \cdot P$.

Рассматривается несколько специальных случаев и приложений. Так, если M — комплексное n-мерное проективное пространство, то группа $P(M, T^1)$ изоморфна группе целых чисел, причем единице соответствует $(2n+1)$-мерная сфера, являющаяся произведением над M. Дается геометрическое описание группы $P(M, T^1)$ в случае, когда M — однородное пространство односвязной группы Ли G по ее компактной связной подгруппе. Для главных произведений с унитарной группой U_n, используя факторизацию по SU_n, автор выводит условие, обобщающее результаты Ивамото (Iwamoto H., Tôhoku Math. J., 1950, **1**, ser. 2, 109) и Лихнеровича (C. r. Acad. sci., 1952, 12—14) для равенства нулю 2-мерного класса Чженя и связанной с ним обобщенной кривизны Риччи. Устанавливается соотношение между пучками нормальных и касательных реперов для подпространства M' некоторого комплексного эрмитова пространства M. И. З. Розенкноп

8205. О единственности разложения приводимого риманова пространства. Кручкович Г. И., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 4, 4, 583—586

Пусть

$$ds^2 = ds_0^2 + ds_1^2 + \ldots + ds_k^2 \qquad (1)$$

есть полное расслоение метрики ds^2, т. е. разложение ds^2 на евклидову часть ds_0^2 и неприводимые неодномерные $ds_1^2, \ldots, ds_k^2$ (каждая из метрик ds_0^2, $ds_1^2, \ldots, ds_k^2$ зависит от своих переменных). Метрика ds^2 предполагается произвольного знака, а все рассмотрения — локальными. Ставится вопрос, существуют ли отличные от (1) расслоения ds^2, и если существуют, то какими преобразованиями координат они получаются из (1). С этой точки зрения преобразования координат в каждом из пространств ds_0^2, $ds_1^2, \ldots, ds_k^2$ по отдельности считаются тривиальными. Результаты:

1) Если никакие две из метрик $ds_0^2, ds_1^2, \ldots, ds_k^2$ не допускают абсолютно параллельных векторных полей, то все расслоения геометрически совпадают с (1); соответствующие преобразования координат — только тривиальные.

2) Если какие-то $p (\geqslant 2)$ из метрик ds_ν^2 допускают соответственно $r_1, \ldots, r_p$ независимых абсолютно параллельных полей (при $\nu > 0$ это могут быть только изотропные поля, ввиду неприводимости $ds_1^2, \ldots, ds_k^2$), то существуют другие расслоения, и все они получаются из (1) (с точностью до тривиальных преобразований) преобразованиями группы движений, зависящей от $r = \sum_{i<j} r_i r_j$ параметров и перемешивающей только переменные из этих p метрик.

Например, если $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ и $r_1 = r_2 = 1$ (ds_0^2 отсутствует), то, как известно (Eisenhart, Ann. Math., 1938, **39**, 316), при некотором выборе координат в ds_1^2 и ds_2^2

$$ds_1^2 = dx^1 dx^2 + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha dx^\beta$$
$$(\alpha, \beta = 3, \ldots, m_1;\ \gamma = 2, 3, \ldots, m_1)$$
$$ds_2^2 = dy^1 dy^2 + g_{\nu\mu}(y^\lambda)\, dy^\nu dy^\mu$$
$$(\nu, \mu = 3, \ldots, m_2;\ \lambda = 2, 3, \ldots, m_2)$$

(абсолютно параллельные поля касаются линий x^1 и y^1), и тогда соответствующая группа движений в ds^2.

$$x^{1'} = x^1 - cy^2$$
$$y^{1'} = y^1 + cx^2$$

Аналогичный вид имеют преобразования группы и в общем случае. А. С. Солодовников

8206. Пространства аффинной связности, допускающие понятие площади. Хаймович (Spatii cu conexiune afină, care admit notiunea de arie. Haimovici Adolf), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR, Fil, Jai, 1955, Ser. 1, 6, № 1—2, 123—133 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор говорит, что пространство аффинной связности A_n допускает понятие площади, если существует функция

$$S(X, Y) = \sqrt{a_{ijhk}(X^i Y^j - X^j Y^i)(X^h Y^k - X^k Y^h)}$$

двух векторов $X(X^1, \ldots, X^n)$, $Y(Y^1, \ldots, Y^n)$ и координат $x^1, \ldots, x^n$ общей исходной точки этих двух векторов, инвариантная относительно параллельных переносов. В этой работе автор определяет пространства, для которых тензор a_{ijhk} представляется в виде (I) $g_{ij}g_{hk}$, а также пространства, для которых в некоторой системе координат

$$\text{(II)}\quad a_{ijhk} = \delta_i^h \delta_j^k g_h g_k,$$

где δ_i^h — символ Кронекера. C. Teleman

8207. О некоторых аффинных связностях, локально ассоциированных с данной несимметричной связностью. Коссу (Su alcune connessioni affini localmente associate ad una assegnata connessione asimmetrica. Cossu Aldo), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 2, 193—198 (итал.)

Рассматривается n-мерное пространство аффинной связности L_{ij}^k с кручением. В дифференциальной

окрестности 1-го порядка точки $\overset{0}{x}$ изучается вторая аффинная связность $\bar{L}^k_{ij}$ совпадающая в $\overset{0}{x}$ с L^k_{ij}. Обозначая

$$\partial_k \gamma^r_{ij} = \partial_k \bar{L}_{ij}(\overset{0}{x}) - \partial_k L^r_{ij}(\overset{0}{x}),$$

автор ограничивается рассмотрением связностей $\bar{L}^k_{ij}$, удовлетворяющих условию $\partial_{(r}\gamma^k_{ij)} = \delta^k_{(r}\rho_{ij)}$ где ρ_{ij} — произвольный симметрический тензор (при этом совпадают элементы 3-го порядка E_3 геодезических обеих связностей, проходящих через $\overset{0}{x}$ в данном направлении). В этом случае для $\delta_r\gamma^k_{ij}$ получается выражение через ρ_{ij} и величины кривизны связностей L^k_{ij} и $\bar{L}^k_{ij}$. Наложив затем ряд дополнительных условий (например, $\rho_{ij}=0$, $\partial_k \bar{L}^s_{(js)} = \partial_k \bar{L}^s_{(js)}$, локальная интегрируемость связности $\bar{L}^k_{ij}$, равенство нулю ее тензора Вейля), автор получает возможность определить $\partial_k L^r_{ij}(x)$ только через $\bar{L}^k_{ij}$, и ее производные 1-го порядка в $\overset{0}{x}$. Рассматриваются и некоторые другие дополнительные условия (например, совпадение геодезических обеих связностей). А. П. Широков

8208. **Индуцированные связности и вложенные римановы пространства. Кобаяси** (Induced connections and imbedded Riemannian spaces. Kobayashi Shoshichi), Nagoya Math. J., 1956, **10**, June, 15—25 (англ.)

Теория связности в расслоенных пространствах применяется к вопросу о вложении риманова пространства в евклидово пространство. Пусть M' — n-мерное риманово пространство, изометрически вложенное в $(n+k)$-мерное евклидово пространство R^{n+k}. Многообразие P' касательных ортонормированных реперов к M' отображается на многообразие $P_{n,k}$ n-реперов, связанных с фиксированной точкой пространства R^{n+k}. В $P_{n,k}$ вводится связность расслоенного пространства.

Теорема 1. Связность в P', индуцированная связностью в $P_{n,k}$, необходимо является римановой связностью M'. Аналогичное утверждение верно и в том случае, когда M' ориентируемо, а $\tilde{P}_{n,k}$ — многообразие ориентированных реперов.

Теорема 2. Пусть M' — n-мерное ориентируемое риманово пространство, вложенное в $(n+1)$-мерное евклидово пространство и h — отображение многообразия P' ортонормированных ориентированных реперов в M на многообразие ортонормированных ориентированных реперов единичной сферы S^n. Связность на M', индуцированная римановой связностью на S^n, является римановой связностью M'.

А. С. Феденко

8209. **Заметка об изотермическом вложении компактных римановых многообразий в евклидовы пространства. Оцуки** (Note on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean spaces. Otsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1956, **5**, № 2, 95—102 (англ.).

Автор уточняет результаты, полученные в работах Чжэня и Кейпера (Chern S. S. Kuiper N., H., Ann. Math., 1952, **56**, № 3, 422—430) и свои собственные (РЖМат, 1956, 726), о невозможности вложений цитированных в заглавии и получает несколько новых. Например, доказана теорема: «Компактное n-мерное риманово многообразие M, с тензором кривизны $R_{ijkl} \neq 0$ нельзя изометрично вложить в евклидово пространство размерности $2n - k(M)$. Здесь $k(M) = \max_{p \in M} k(p)$, а $k(p)$ — ранг в точке p системы линейных уравнений: $R_{ijkh}x^h = 0$.

Другие результаты касаются многообразий с тензором кривизны $R_{ijkh} = H_{ik}H_{jh} - H_{ih}H_{jk}$ и 3-мерных многообразий. Доказательства основаны на результатах упомянутых работ и леммах алгебраического характера. Ю. А. Волков

8210. **Об обобщенном гармоническом и инвариантном кратных интегралах в пространстве элементов высшего порядка. Сасаяма** (On the extended harmonic and invariant multiple integrals of higher order. Sasayama Hiroyoshi), Tensor, 1954, **4**, № 2, 122—127 (англ.)

Кратный интеграл и внешние формы в пространстве линейных элементов высшего порядка, т. е. общего целого порядка M, рассматривались автором в предшествующих работах (Tensor, N. S., 1952, **2**, 36—46; 1954, **3**, 123—127), причем базисное точечное пространство не было снабжено геометрией.

В настоящей работе понятия гармонического и инвариантного интегралов обобщаются на случай, когда базисное пространство снабжено римановой метрикой и соответственно замкнутой полупростой конечной непрерывной лиевой группой преобразований. Автор пользуется эксковариантным дифференцированием, введенным Кацурада (Katsurada Y., J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. (1), 1951, **12**, 19—28) и применяет обобщенную производную Ли, опираясь на его же работу (Katsurada Y., Tensor, N. S., 1952, **2**, 15—26).

Получен ряд формул для обобщенного лапласиана. Установлено, что гармоничность и инвариантность кратного интеграла в базисном точечном пространстве эквивалентны обобщенной гармоничности и соответственно инвариантности в пространстве линейных элементов высшего порядка. Далее доказана коммутативность обобщенного дифференцирования Ли с внешним, а также с дуальным (получаемым из эксковариантного) дифференцированием. Отсюда вытекает, что внешний и дуальный дифференциалы инвариантного обобщенного кратного интеграла являются инвариантными. Следовательно, производная Ли от обобщенного гармонического кратного интеграла является также гармонической. Б. Л. Лаптев

8211. **О пространствах постоянной кривизны. В р энчану** (Asupra spațiilor cu curbură constantă. Vrănceanu G.), Studii și cercetări științ. Acad. RPR. Fil. Iași., 1955, Ser. 1, **6**, № 1—2, 59—64 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор показал в предыдущей работе (РЖМат, 1956, 730), что ds^2 риманова пространства V_n, обладающего ортогональной группой в качестве стационарной группы в начале координат, задан формулой:

$$ds^2 = \alpha^2[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] + \beta[x^1dx^1 + \ldots + x^ndx^n]^2. \quad (1)$$

где α и β — произвольные функции суммы $r^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. В этой заметке он показывает, что если пространство имеет постоянную кривизну k, то в формуле (1) будет

$$\beta = \left(\alpha'^2 + \frac{2\alpha\alpha'}{r} + k\alpha^4\right)/(1 - k\alpha^2 r^2). \quad (2)$$

Принимая в качестве α функции частного вида, можно получить метрики Римана и Бельтрами.

Также доказывается, что если ds^2 задан формулами (1) и (2), то квадратичная форма $ds^2 + (1 - ka^2r^2)(dx^{n+1})^2$ определяет метрику пространства V_{n+1} постоянной кривизны k, которая сводится

при $\alpha = 1$ к метрике Дингхаса (Dinghas, Math. Nachr., 1948, 1, 287—291). C. Teleman

8212. Геодезическое соответствие римановых пространств. Курита (Geodesic correspondence of Riemann spaces. Kurita Minoru), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 1, 22—39 (англ.)

Автор использует свой метод (РЖМат, 1956, 4834) для исследования римановых пространств S и $\bar{S}$ в геодезическом соответствии. Именно: при геодезическом соответствии формы кривизны пространств S и $\bar{S}$ связаны равенством

$$\bar{\Omega}^j_i = \Omega^j_i + P_{ik}\,[\omega^k \omega^j]; \qquad P_{ik} = P_{ki}.$$

Исследуется случай n-кратного корня P уравнения

$$|P_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0.$$

При этом случае $P = \text{const}$ и в случае $P > 0$ линейный элемент S приводится к виду

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \sin^2 x^1\,[g_{\alpha\beta}(x^2, \ldots x^n)\,dx^\alpha dx^\beta]$$
$$(\alpha, \beta = 2, \ldots n).$$

Тогда пространство $\bar{S}_0$ с линейным элементом

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{4}\sin^4 x^1\,[d(2x^1) + \sin^2(2x^1)\cdot(g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta)]$$

находится в требуемом геодезическом соответствии с пространством S. Пространство $\bar{S}$, отличное от $\bar{S}_0$, находится в таком геодезическом соответствии с пространством S, если пространство S_0 с линейным элементом $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ допускает геодезическое отображение на некоторое S_0' и система

$$h_\beta\left(R^\beta_{\alpha\gamma\varepsilon} + \delta^\gamma_\alpha \delta^\beta_\varepsilon - \delta^\varepsilon_\alpha \delta^\gamma_\beta\right) = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 2, \ldots n)$$

имеет ненулевое решение.

В случае $P < 0$ получаются аналогичные результаты с заменой $\sin\alpha$ на $\operatorname{sh}\alpha$.

В случае $P = 0$ автор определяет линейные элементы S и $\bar{S}$:

При $n \geqslant 3$ пространство S_n с линейным элементом

$$ds^2 = (dx^1)^2 + c^2(x^1)\,[g_{\alpha\beta}(x^2 \ldots x^n)\,dx^\alpha dx^\beta]$$

допускает вложение в евклидово S_{n+1}, если линейный элемент $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ определяет риманово пространство постоянной положительной кривизны.

В. И. Ведерников

8213. Изоклинные направления при параллельном перенесении. Мира-Фернанди (Direzioni isocliniche nei trasporti lineari. Mira Fernandes A. de), Rev. Fac. Ciênc, Univ. Lisboa, 1954—1955, **A3**, № 2, 243—245 (итал.)

В римановом пространстве $V(x^1, \ldots, x^n)$ с метрикой $ds^2 = a_{ik}dx^i dx^k$ рассматривается пара связностей Γ^l_{ik}, Γ'^l_{ik}, причем Γ^l_{ik} служит для параллельного перенесения контра-, а Γ'^l_{ik} — ковариантных векторов (связности действуют согласованно). Пусть α, β — два поля единичного вектора, заданные вдоль кривой $x^i = x^i(s)$. Выводится формула

$$\frac{d}{ds}\cos(\alpha, \beta) = \frac{\cos(\bar{\alpha}, \beta)}{R} + \frac{\cos(\alpha, \bar{\beta})}{R_1} - \alpha^p \beta_i C^{\cdot\cdot i}_{kp}\,\frac{dx^k}{ds},$$

где

$$\bar{\alpha}^i = R\,\frac{D\alpha^i}{Ds} = R\left(\frac{d\alpha^i}{ds} + \alpha^p \Gamma^i_{pk}\,\frac{dx^k}{ds}\right),$$

R — длина вектора $\frac{D\alpha^i}{Ds}$ (аналогично для β) и $C^{\cdot\cdot i}_{kp} = \Gamma^i_{kp} - \Gamma'^i_{kp} = \delta^i_{k|p}$. Устанавливается ряд тривиальных следствий этой формулы при различных предположениях относительно $C^{\cdot\cdot i}_{kp}$

$$\left(C^{\cdot\cdot i}_{kp} = C_p \delta^i_k,\ C^{\cdot\cdot i}_{kp} = 0,\ C^{\cdot\cdot i}_{kp} = C^i a_{kp}\right).$$

А. С. Солодовников

8214. Интегрально-геометрический метод в теории кривых. Решетняк Ю. Г., Тр. 3-го всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 164

Развитие теории А. Д. Александрова, в которой поворот (интегральная кривизна) и полное кручение определяется непосредственно, без использования понятий кривизны и кручения, привело к ряду трудностей. Эти трудности преодолеваются применением специальных интегрально-геометрических соотношений, основанных на понятии меры множества n-мерных плоскостей n-мерного пространства постоянной кривизны, инвариантной относительно движений пространства.

Г. И. Дринфельд

8215. О гомогенном пространстве Келера. Мацусима (均質ケーラー空間について。松島與三), 科學, Кагаку, 1957, 27, № 3, 135—136, 137—139 (японск.)

8216. Инварианты кривизны риманова пространства четырех измерений. Жеэньо, Дебевер (Les invariants de courbure de l'espace de Riemann à quatre dimensions. Géhéniau J., Debever R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 2, 114—123 (франц.)

Определяются все (функционально независимые) скалярные инварианты четырехмерного риманова пространства (при условии $ds^2 > 0$), являющиеся функциями метрического тензора g_{ij} и его первых и вторых производных. Известно, что таких инвариантов 14; все они выражаются через g_{ij} и тензор кривизны R_{hijk}. Для построения инвариантов тензор кривизны разбивается на независимые части: $R_{\ldots} = C^+_{\ldots} + C^-_{\ldots} + e_{\ldots} - \frac{R}{12} g_{\ldots}$, где слагаемые определяются с помощью формул:

$$g_{hijk} = g_{hi}g_{jk} - g_{hk}g_{ij},$$

$$S_{hijk} = R_{hijk} + \frac{R}{12}\,g_{hijk}\ \left(R = R^{ki}_{ki}\right),$$

$*S_{hijk} = \varepsilon_{himn}\varepsilon_{jkpq}S^{mnpq}$ (ε_{hijm} — дискриминантный тензор).

$$C_{\ldots} = \frac{1}{2}(S_{\ldots} + *S_{\ldots}), \quad e_{\ldots} = \frac{1}{2}(S_{\ldots} - *S_{\ldots}).$$

$$C^{\pm}_{\ldots} = \frac{1}{2}(C_{\ldots} \pm \tilde{C}_{\ldots}),\ \tilde{C}_{hijk} = \varepsilon_{jkmn}C^{mn}_{hi}.$$

Первые 4 инварианта суть коэффициенты характеристического уравнения $|R^i_j - \lambda\delta^i_j| = 0$, где R_{ij} — тензор Риччи. Следующие четыре — коэффициенты при λ^4 и λ^3 в уравнениях

$$\left|C^{\pm jk}_{hi} - \lambda\delta^{jk}_{hi}\right| = 0\ \left(\delta^{jk}_{hi} = \delta^j_h\delta^k_i - \delta^k_h\delta^j_i\right),$$

следующие два — коэффициенты при λ^5 и λ^4 в уравнении

$$\left|(D^-D^+)^{jk}_{hi} - \lambda\delta^{jk}_{hi}\right| = 0,$$

где

$$D^{\pm jk}_{hi} = e^{mn}_{hi} C^{\pm jk}_{mn}, \quad (D^{-}D^{+})^{jk}_{hi} = \frac{1}{4} D^{-mn}_{hi} D^{+jk}_{mi},$$

следующие четыре — коэффициенты при λ^5 и λ^4 в уравнениях

$$\left| E^{\pm jk}_{hi} - \lambda \delta^{jk}_{hi} \right| = 0,$$

где $E^{\pm jk}_{hi} = e^{mn}_{hi} D^{\pm jk}_{mn}$.

Выражение для инвариантов дается в ортогональном репере. В заключение находится выражение для инвариантов в репере главных направлений тензора Риччи и показывается, что все компоненты тензора кривизны могут быть выражены, в свою очередь, через инварианты (отсюда вытекает независимость инвариантов)

А. С. Солодовников

8217. **Инварианты кривизны римановых пространств теории относительности. Жеэнью** (Les invariants de courbure des espaces riemanniens de la relativité. Géhéniau J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 252—255 (франц.)

Выводятся формулы, позволяющие упростить выражения для инвариантов кривизны, полученных в предыдущей статье (Реф. 8216). Резюме автора

8218. **О некоторых проблемах, касающихся почти симплектических многообразий и динамических систем. Реб** (Sur certains problèmes relatifs aux variétés presque-symplectiques et systèmes dynamiques. Reeb Georges), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 104—106 (франц.)

Рассматривается n-мерное многообразие V_n класса C^2 (дважды непрерывно дифференцируемое), на котором определена внешняя дифференциальная форма Ω класса C^2 второго порядка и наибольшего ранга.

По определению, при n четном (V_n, Ω) определяет на V_n структуру почти симплектического многообразия (СПС), если, кроме того, $d\Omega = 0$, то структуру симплектического многообразия (СС).

При n нечетном (V_n, Ω) определяет на V_n структуру динамической системы (ДС), если, кроме того, $d\Omega = 0$, то структуру динамической системы с одним интегральным инвариантом (ДСИ).

К любому почти симплектическому многообразию можно присоединить по крайней мере одну почти комплексную структуру и обратно.

Строится пример многообразия симплектической структуры. Задается p-мерное многообразие класса C^3. Ковариантные касательные векторы образуют $2p$-мерное многообразие V_{2p}; проекция V_{2p} на V_p, присоединяющая к $(x, \omega) \in V_{2p}$ точку x (где $x \in V_p$ и ω есть ковариантный вектор в точке x), обозначается через P. $P(x, \omega)$ — продолжение P в касательном векторном пространстве (x, ω). Тогда $P^*(x, \omega)$ (la transposée), полученное из $P(x, \omega)$, позволяет определить ковариантный вектор $\alpha(x, \omega) = P^*(x, \omega)$, присоединенный к (x, ω). Элементы $\alpha(x, \omega)$, где (x, ω) описывает V_{2p}, определяют на V_{2p} поле ковариантных векторов или пфаффову форму α. Пара $(V_{2p}, d\alpha)$ определяет структуру симплектического многообразия.

Траекториями в динамической системе названы интегральные линии характеристического поля направлений, присоединенных к динамической системе.

Отмечены следующие свойства. 1. Многообразия $V_n \times V_n$, $V_n \times V_m$, $V_m \times V_m$, где V_n — многообразие СПС и V_m — ДС, являются соответственно многообразием СПС, ДС и многообразием СПС.

2. Пусть φ: $V_{n-1} \to V_n$ — наложение класса C^2 ранга $n-1$. Если при этом (V_n, Ω) — ДС, то предполагается, что $\varphi(V_{n-1})$ есть трансверсаль к траекториям этой системы. В этих условиях, если (V_n, Ω) есть а) ДС, б) ДСИ, в) СС, то $(V_{n-1}, \varphi^*(\Omega))$ есть а) многообразие СПС, б) многообразие СС, в) ДС, г) ДСИ.

3. Многообразие $S_4 \times S_1$ (S_q есть q-мерная сфера) допускает структуру ДС. Наоборот, не существует на $S_4 \times S_1$ структуры ДС, характеристическое поле которой было бы гомотопно полю направлений касательных к слоям S_1 многообразия $S_1 \times S_4$. В примечании автор отмечает, что Чжень Шэн-шэнь (Chern S. S., Colloq. Internat. C. N. R. S., Strasbourg, Paris, 1953, 52, 133) дает необходимые и достаточные условия существования структуры ДС на V_{2n+1}.

Н. М. Остиану

8219. **Четырехмерные пространства Эйнштейна. Гуггенхеймер** (Vierdimensionale Einsteinräume. Guggenheimer Heinrich), Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e appl. 1952, ser. 5, 11, 362—373 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

В работе изучаются свойства характеристических классов компактных комплексных многообразий двух комплексных измерений, снабженных комплексной метрикой Эйнштейна. Характеристические классы c^2 и c^4 являются целочисленными классами когомологий соответственно размерностей 2 и 4. Умножением на фундаментальный класс гомологий M многообразия M из этих классов получаются два целых числа.

$$(c^2 \cup c^2) \cdot M = p^{(1)} - 1, \quad c^4 \cdot M = \chi.$$

Число χ является характеристикой Эйлера—Пуанкаре, а число $p^{(1)}$ обобщает линейный род алгебраических поверхностей. Доказано, что необходимым условием того, чтобы на компактном комплексном многообразии комплексной размерности 2 можно было ввести метрику Эйнштейна, является выполнение неравенства $0 \leqslant p^{(1)} - 1 \leqslant 3\chi$. Кроме того, если $\chi = 0$, то метрика должна быть локально евклидовой. Отмечены некоторые свойства метрик Эйнштейна и их характеристических классов. В частности для $\chi \leqslant 8$ приведена таблица всех возможных алгебраических поверхностей с метрикой Эйнштейна.

Предполагая, что тензор Риччи не обращается тождественно в нуль, автор изучает однородные метрики в смысле Бохнера. Приведена таблица возможных однородных метрик Эйнштейна на компактном четырехмерном многообразии Кэлера, компоненты тензора кривизны которых являются целыми числами. В приложении изложено обобщение на высшие размерности. Получены условия, которым должны удовлетворять характеристические классы, необходимые для того, чтобы указанная выше метрика могла быть определена на многообразии.

S. Chern

Перевод из Math. Revs., 1954, 15, № 8, 742

8220. **Проблема движения в общей теории относительности. Нарликар, Рао** (The problem of motion in general relativity. Narlikar V. V., Rao B. R.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1955, A21, № 6, 416—427 (англ.)

Вывод уравнений движения из уравнения поля опирается на метод последовательных приближений, предложенный Эйнштейном и Инфельдом в 1949 г. При этом возникает необходимость в каждом приближении не только отыскивать уравнения движения, но и строить систему самих уравнений поля, вместо точных уравнений Эйнштейна. Анализ этого метода, данный в реферируемой работе, привел авторов к выводу, что он не обеспечивает построение уравнений поля в любом приближении и является неудовлетворительным с математической точки зрения. Несколько видоизменив способ аппроксимации, они указывают строгий метод построения уравнений поля в любом последующем приближе-

нии, если они известны в предыдущем. Метод авторов предполагает разрешимость уравнений поля в предыдущем приближении и существенным образом нуждается в дополнительных (координатных) условиях. В частности, используются условия

$$\partial\gamma_{\nu m}{}^{l}dx_m - \partial\gamma_{00}{}^{l}\partial x_0 = 0,\ \partial\gamma_{lm}/\partial x_n = 0,$$

где $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (1/2)\,\tau_{\mu\nu}\cdot\tau_l^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$, а величины представляют собой искомые добавки к галилеевским компонентам метрического тензора $\tau_{\mu\nu}$ $(m, n = 1, 2, 3)$. Получены также уравнения движения с точностью до шестого порядка. Я. И. Пугачев

8221. **Взаимные статические решения уравнений гравитационного поля. Букдал** (Reciprocal static solutions of the equations of the gravitational field. Buchdahl H. A.), Austral. J. Phys., 1956, 9, № 1, 13—18 (англ.)

Если метрика V_n, в некоторой системе координат, может быть задана в виде: $ds^2 = g_{ik}(x^j)\,dx^i dx^k + g_{aa}(x^j)\,(dx^a)^2$, где a — некоторый фиксированный индекс, отличный от i, j, k, то, обобщая четырехмерный случай, характерный для статических решений уравнений поля тяготения, автор называет такие V_n статическими (РЖМат, 1956, 3310) и метрику $ds^2 = (g_{aa})^{2/(n-3)}g_{ik}dx^i dx^k + (g_{aa})^{-1}\,(dx^a)^2$ — взаимной относительно данной. Предполагается также, что тензор, Риччи V_n $G_{\mu\nu} = 0$.

Доказывается, что если отбросить последнее предположение, то тензорные плотности вида $P_\mu^\nu = (1/2)\delta_\mu^\nu G - G_\mu^\nu$, отвечающие таким метрикам, удовлетворяют уравнениям:

$$\bar{P}_i^k = P_i^k,\ \left(\bar{P}_a^a - \frac{1}{n-3}\bar{P}_i^i\right) = -\left(P_a^a - \frac{1}{n-3}P_i^i\right),$$

где ненадчеркнутые величины отвечают первой метрике, а надчеркнутые — второй. При $n = 4\,(a = 4)$ отсюда следует, что для областей, содержащих массы (где тензор энергии — импульса $T_\mu^\nu = P_\mu^\nu$), если имеется одно решение уравнений поля, то можно построить решение, «взаимное» ему, такое, что полные энергии таких полей будут равны по величине и противоположны по знаку. В частности, если таким взаимным решениям сопоставить термодинамики равновесных жидкостей с уравнениями, соответственно $\rho = f(p)$ и $\bar{\rho} = \bar{f}(\bar{p})$, то зная одно из них, можно определить другое. Полные энергии предполагаются конечными и регулярными. А. З. Петров

8222. **О фронтах волны в единой теории Эйнштейна. Клаузер** (Sui fronti d'onda nella teoria unitaria einsteiniana. Clauser Emilio), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, 98, № 3, 473—492 (итал.)

В релятивистской теории тяготения фронт волны представляют в виде характеристического многообразия, в смысле Адамара, уравнений поля тяготения. Эта проблема обобщена и исследована для единой теории Лихнеровичем (РЖМат, 1955, 5065) и Главатым (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, 38, № 5), который рассматривал случай, когда изотропные нормали гиперповерхности, представляющей фронт волны, совпадают с изотропными геодезическими риманова пространства-времени, после чего задача может быть сведена к исследованию алгебраической системы уравнений, линейных и однородных относительно параметров, характеризующих фронт волны.

Автор рассматривает два варианта уравнений единого поля Эйнштейна (РЖМат, 1954, 3450) для областей, свободных от масс, когда они записываются в виде (для варианта 1953 г.):

$$R_{\lambda\mu} = 0,\ R_{\lambda\mu,\nu} + R_{\mu\nu,\lambda} + R_{\nu\lambda,\mu} = 0,$$

$$\Gamma_\lambda \equiv \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma = 0,\ \partial_\nu g_{\lambda\mu} - g_{\sigma\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - g_{\lambda\sigma}\Gamma_{\nu\mu}^\sigma = 0$$

или (для варианта 1950 г.) вместо второго уравнения записывается $R_{\lambda\nu} = 0$. Он предполагает, кроме того, что имеет место случай, рассмотренный Главатым, когда

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\} + (1/2)\,h^{\nu\alpha}\left(\nabla_\mu g_{\lambda\alpha} + \nabla_\lambda g_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha g_{\lambda\mu}\right) +$$

$$+ 2p_\alpha\left(g_{\alpha\mu}h^{\nu\alpha} + 2k_{[\lambda}^\alpha\delta_{\mu]}^\nu + k_{[\mu}^\nu\delta_{\lambda]}^\alpha - \delta_\lambda^\nu\delta_\mu^\alpha\right),$$

где $p_\alpha = (1/8)\left(\ln\frac{h}{g}\right)_{,\alpha}$; вследствие этого основные уравнения поля могут быть выражены через вектор p_α, тензоры $h_{\lambda\mu} \equiv g_{\lambda\mu}$, $k_{\lambda\mu} \equiv g_{\lambda\mu}$ и плотности $g = |g_{\lambda\mu}|$, $h = |h_{\lambda\mu}|$ и $k = |k_{\lambda\mu}|$. Здесь ∇ — символ ковариантного дифференцирования относительно присоединенной римановой метрики, а $\left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\}$ символ Кристофеля.

Далее, используя идею Лихнеровича, автор исследует совместность получаемой системы дифференциальных уравнений единого поля, записывает уравнения совместности и переходит к такой системе координат, относительно которой нормаль к искомому характеристическому многообразию совпадает с координатной кривой x^4. Используя идею Главатого, автор сводит вопрос к исследованию алгебраической системы относительно параметров, определяющих фронт волны, приводя, таким образом, проблему к определению арифметических инвариантов. В зависимости от числа N таких инвариантов автор получает несколько возможных случаев. А. З. Петров

8223. **Об уравнениях Максвелла в единой неголономной теории. Теодореску** (Asupra ecuaţiilor lui Maxwell in teoria unitară neolonomă. Teodorescu Ion), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. stiinţ. natur., 1955, № 8, 43—58 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор изучает уравнения электромагнитного поля единой неголономной теории Г. Врэнчану (Compt. rend. Acad. sci. Roum., 1936, 1, № 6; J. Phys., 1946, 7, 541—546). Для статического сферического поля с зарядом $e_0 = 0$, т. е. в отсутствии электромагнитного поля (метрика Шварцшильда), V_5^4 голономно, следовательно без кручения. Для статической сферической метрики Рейснера (точечный заряд $e_0 \neq 0$, тензор энергии—импульса g_{ik}) уравнения электромагнитного поля совпадают с классическим уравнением Максвелла. Следовательно, единая неголономная теория согласуется с опытом. A. Popovici

8224 К. **Интегральная и матричная геометрия, евклидова и неевклидова. I. Ковариантные функции от инвариантов. II. Ковариантные функции от ковариантов. Линфилд** (Integral and matric geometry euclidean and non-euclidean I. Covariant functions of invariants. II. Covariant functions of covariants. Linfield B. Z.), Ann. Arbor., Mich., 1954, I, 345 p., II, 99 p. (англ.)

Книга представляет собой руководство по дифференциальной геометрии трехмерного и многомерного евклидовых пространств, в котором применяются весьма своеобразные обозначения и терминология. Точка евклидова пространства E_m определяется не своим

радиусом-вектором $\mathbf{r}=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, а скалярной функцией от вспомогательной переменной z:

$$f(z,u)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\{x_1\cos z+x_2\sin z+ \\ +x_3\cos 2z+\ldots\}, \quad (1)$$

где $u=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — совокупность координат (вообще говоря, криволинейных), от которых зависят $x_1, x_2, \ldots, x_m$; при $n=m$ функция $f(z,u)$ определяет любую точку пространства E_m, при $n<m$ — любую точку n-мерной поверхности в E_m. Вектор пространства E_m задается разностью двух функций вида (1); коэффициенты в правой части (1) подобраны так, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z,u)\,dz=1; \quad \int_{-\pi}^{\pi}(f_1-f_2)^2\,dz=|f_1-f_2|.$$

Инвариант автор определяет, как обычно; ковариантом же он называет матрицу X с p строками и q столбцами, удовлетворяющую при $p=q=n$ уравнению $\varphi(X)=0$ с инвариантными коэффициентами. При $p=1$, $q=n$ мы имеем контравариантный вектор, примером которого может служить

$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \ldots, \frac{du_n}{dg}\right);$$

при $p=n$, $q=1$ — ковариантный вектор, например,

$$\frac{df}{du}=\left(\frac{df}{du}, \frac{df}{du}, \ldots, \frac{df}{du_n}\right).$$

В указанных обозначениях в первой части рассматриваются следующие вопросы: сопряженные векторы и коварианты; ковариант $Z(f)$, соответствующий вектору $\frac{d^2r}{ds^2}$ в случае линии и произведению тензора b_i^j второй квадратичной формы на единичный вектор нормали — в случае гиперповерхности; теория кривых в евклидовых пространствах E_2, E_3, E_4 и в трехмерном римановом (по терминологии автора, неевклидовом) пространстве, вложенном в пространство E_4. Основы теории поверхности в трехмерном евклидовом пространстве изложены в первой и второй частях, причем введено и понятие абсолютной производной Dv/Du вектора v; в первой части рассмотрены, в частности, поверхности вращения и линейчатые поверхности.

Во второй части даны также основы теории n-мерных поверхностей евклидова пространства E_m и введены коварианты A, B, C, D, E, представляющие собой функции от ковариантов и векторов; с их помощью определяется абсолютная производная от коварианта (тензора второй валентности).

Г. Б. Гуревич

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

8225. **Избранные проблемы комбинаторной геометрии на плоскости. Хадвигер, Дебруннер** (Choix de quelques problèmes de géométrie combinatoire dans le plan. Hadwiger H., Debrunner H.), Enseign. math., 1957, 3, № 1, 35—70 (франц.)

Перевод с немецкого (РЖМат, 1957, 867).

8226. **Несколько свойств вершинных гиперплоскостей нормального многоугольника. Наденик** (Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka. Nádeník Zbyněk), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 3, 287—291 (чеш.; рез. русск., франц.)

Продолжение работы того же автора (РЖМат, 1957, 2581). Нормальным многоугольником называется многоугольник $A_1A_2\ldots A_{n+1}$, где все A_i — точки общего положения, n — число измерений пространства. На каждой прямой A_iA_{i+1} возьмем точку B_i, не совпадающую ни с одной из точек A_i и A_{i+1}. Назовем вершинным подпространством подпространство $n-2$ измерений, проходящее через все вершины кроме A_i и A_{i+1}, а вершинной гиперплоскостью всякую гиперплоскость, содержащую это подпространство и не проходящую ни через одну из исключенных точек. Тогда имеет место следующая теорема: если точки $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ принадлежат одной гиперплоскости и n-нечетное, то вершинные гиперплоскости $\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots \beta_{n+1}$, которые проектируют точки B_i из вершинных подпространств, имеют общую точку или общее направление (автор различает эти случаи, потому, что формулирует свою теорему для евклидова пространства, хотя ясно, что она — проективная. *Реф.*). Эта точка или направление принадлежит той гиперплоскости, в которой лежат точки B_i. Н. М. Бескин

8227. **О тетраэдрах, эквивалентных кубу. Зидлер** (Sur les tétraèdres équivalents à un cube. Sydler J. P.), Elem. Math., 1956, 11, № 4, 78—81 (франц.)

Для того чтобы многогранник был равносоставлен с кубом, необходимо выполнение известных условий Дена (см., например, РЖМат, 1957, 5070). Правильный тетраэдр этим условиям не удовлетворяет и потому не является равносоставленным с кубом; однако существуют и тетраэдры, равносоставленные с кубом; ряд таких тетраэдров был найден Хиллом (Hill, Proc. London Math. Soc., 1896, 27, 39—53).

Простейшим из тетраэдров Хилла служит тетраэдр T с вершинами 0, a, $a+b$, $a+b+c$, где a, b, c — три единичных взаимно перпендикулярных вектора.

В реферируемой заметке показано, что тетраэдр T может быть разбит на 4 многогранника, из которых удается сложить призму (отсюда сразу следует, что T равносоставлен с кубом). Доказывается, далее, что тетраэдр с тремя исходящими из одной вершины и взаимно перпендикулярными ребрами a, b, c будет в следующих двух случаях равносоставлен с кубом:

1) $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}$; 2) $a=\sqrt{5}+1$, $b=\sqrt{5}-1$, $c=2$.

Первый из этих тетраэдров разлагается на 2 тетраэдра Хилла, второй же не сводится к тетраэдрам Хилла. Исходя из этого второго тетраэдра и присоединяя к нему равные и подобные ему тетраэдры, автор получает еще три тетраэдра, не сводящиеся к тетраэдрам Хилла. Полученными четырьмя тетраэдрами и исчерпываются известные до сих пор тетраэдры, не сводящиеся к тетраэдрам Хилла и равносоставленные с кубом.

В. Г. Болтянский

8228. **Трансляционная равносоставленность k-мерных параллелотопов. Куммер** (Translative Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Parallelotope. Kummer H.), Arch. Math., 1956, 7, № 3, 219—220 (нем.)

Два полиэдра называются трансляционно равносоставленными в смысле элементарной геометрии, если они допускают элементарно-геометрическое разложение на конечное число попарно соответствующих полиэдров, связанных параллельными переносами. Известно, что для трансляционной равносоставленности двух параллелотопов необходимо и достаточно равенства их объемов. Здесь доказывается такое же утверждение для трансляционной равносоставленности в смысле

теории множеств: Два параллелотопа, рассматриваемые как замкнутые множества, трансляционно равносоставлены тогда и только тогда, если они имеют одинаковые объемы. При этом трансляционная равносоставленность двух множеств U и V понимается в смысле возможности представить их в виде суммы конечного числа непересекающихся множеств, попарно допускающих совмещение параллельным переносом: $U=\bigcup_1^n U_\nu$, $V=\bigcup_1^n V_\nu$,

$$(U_\nu \cap U_\mu = V_\nu \cap V_\mu = 0,\ \nu \neq \mu),$$

причем U_ν параллельным переносом переводится в V_ν. Интересна лемма: k-мерный симплекс S, рассматриваемый как замкнутое множество, трансляционно равносоставлен со своим открытым ядром S (множеством его внутренних точек). В. А. Ефремович

8229. **Группы коллинеаций конечных проективной и аффинной плоскостей, в которых через каждую точку проходит четыре прямых. Кокстер** (The collineation groups of the finite affine and projective planes with four lines through each point. Coxeter H. S. M.), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 20, № 3—4, 165—177 (англ.)

Обозначим через $LF(3, p)$ группу дробно-линейных преобразований от двух переменных над полем $GF(p)$. Брона (Brahana H. R., Ann. Math., 1930, 31, 529—549) показал, что группа коллинеаций проективной плоскости, указанной в заглавии (она, очевидно, совпадает с $LF(3, 3)$), имеет два образующих S и T. Отыскивается полная система определяющих соотношений: $S^6=T^3=(ST)^4=(S^2T)^4=(S^3T)^3=E$,

$$(TS^2T)^2S^2=S^2(TS^2T)^2.$$

Кроме того, показывается, что при $p\neq 3$ матрицы

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

служат образующими для $LF(3, p)$. Полная система определяющих отношений найдена лишь при $p=2$: $T^3=U^3=(TU)^4=(T^{-1}U)^4=E$. Л. А. Скорняков

8230. **Сфера Римана в матричных пространствах. Раманатхан** (The Riemann sphere in matric spaces. Ramanathan K. G.), J. Indian Math. Soc., 1955, 19, № 3—4, 121—125 (англ.)

Рассматривается группа кватернионных унитарных матриц n-го порядка U_n и множество R_n матриц этой группы, переходящих в себя при инволюции $U\to U^*$ $U=(u_i)$, $U^*=(k\bar{u}_{i,j}k^{-1})$. Показывается, что множество R_n переходит в себя при преобразованиях $P\to UPU^*$, где $P\in R_n, U\in U_n$, и что это представление транзитивно на множестве R_n. Множество R_n компактно, как и вся группа U_n. При замене кватернионов комплексными числами множество R_n превращается в обобщение сферы Римана, предложенное Минакшисундарамом (РЖМат, 1957, 4618).

Б. А. Розенфельд

8231. **Рациональные нормальные кривые и k-дуги в конечных пространствах. Сегре** (Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti. Segre Beniamino), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 357—379 (итал.)

Автор уже неоднократно показывал, какую пользу можно извлечь из алгебраической геометрии в разнообразных вопросах алгебры или арифметики, когда надо характеризовать решения систем алгебраических уравнений над конечным телом при определенных алгебраических неравенствах. В двух недавних работах автор дал пример подобных рассуждений, к которым он и возвращается теперь с большей широтой и углублением.

Пусть γ — какое-нибудь конечное тело; оно коммутативно и определяется (до изоморфизма) своим порядком q (целая и положительная степень простого числа p). Если $S_{r,q}$ — линейное (или проективное) r-мерное пространство над γ, то число его точек равно

$$f|q, r|=1+q+q^2+\ldots+q^r;$$

каждая прямая $S_{1,p}$ пространства $S_{r,q}$ содержит $q+1$ точек. В силу коммутативности γ в $S_{r,q}$ можно ввести алгебраическое многообразие V_k^n, определяя обычным образом его измерение k и порядок n; на него распространим некоторые обычные свойства и понятия (например, неприводимость), но не все. Многообразие V_1^r, неприводимое в $S_{r,q}$, не принадлежащее пространству меньшего числа измерений $r'<r$, назовем нормальной рациональной кривой в $S_{r,q}$; в дальнейшем предполагается $p\neq 2$. В наиболее интересном случае при

$$q>r+1 \tag{1}$$

всякая рациональная нормальная кривая пространства $S_{r,q}$ содержит в точности $q+1$ точек из $S_{r,q}$ и при надлежащем выборе проективных координат $x_i (i=0,\ldots,r)$ может быть представлена параметрически в виде:

$$\frac{x_0}{1}=\frac{x_1}{t}=\frac{x_2}{t^2}=\ldots=\frac{x_r}{t^r}. \tag{2}$$

Число нормальных рациональных кривых в общем равно:

$$\nu|q, r|=\frac{\prod_{i=0}^{r}(q^{r+1}-q^i)}{q^4-q^3-q^2+q}; \tag{3}$$

они попарно гомографичны, каждая преобразуется в себя группой q^3-q гомографий. Каждая кривая определяется $(r+3)$ любыми точками из $S_{r,q}$, лишь бы эти точки по $(r+1)$ одной были линейно независимы. Совокупность k точек из $S_{r,q}$ автор называет k-дугой пространства $S_{r,q}$, если при $k\leqslant r$ точки линейно независимы, а при $k\geqslant r+1$ они по $r+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости; всякое V_1^r из $S_{r,q}$ есть $(q+1)$-дуга. Автор ставит три проблемы, для которых дает частичное решение:

I. Для данных r и q определить максимальное значение k такое, что в $S_{r,q}$ существует некоторая k-дуга; каковы k-дуги, соответствующие этому k?

II. Существуют ли значения r и q такие, чтобы всякая $(q+1)$-дуга была рациональной нормальной кривой этого пространства?

III. Для данных значений r и q, удовлетворяющих условию (1), каковы значения $k(\leqslant q)$ такие, что всякая k-дуга располагалась бы на некоторой рациональной нормальной кривой в $S_{r,q}$. Какого типа эти кривые, содержащие k-дуги? С. С. Бюшгенс

8232. **Замечание о k-калоттах конечного линейного пространства размерности 3. Барлотти** (Un'osservazione sulle k-calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre. Barlotti Adriano), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 248—252 (итал.)

Рассматривается трехмерное линейное пространство $S_{3,q}$ над полем Галуа нечетного порядка q; k-калоттой в нем называется совокупность k точек, из которых никакие три не коллинеарны. Показывается, что при $q\geqslant 7$ каждая (q^2-h)-калотта

$(0 \leqslant h \leqslant q-7)$ содержится в (q^2+1)-калотте; при $q=3{,}5$ каждая q^2-калотта содержится в (q^2+1)-калотте (q^2+1 является максимальным возможным значением k). Соответствующие результаты для двумерного пространства см. Сегре (реф. 8231), а также Барлотти (РЖМат, 1957, 1798). В. В. Морозов

8233. Суммы расстояний на сфере и суммы углов симплекса. Гаддум (Distance sums on a sphere and angle sums in a simplex. Gaddum J. W.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 2, 91—96 (англ.)

Рассматриваются оценки сумм углов в симплексе. Под двугранным углом между двумя $(n-1)$-мерными гиперплоскостями в E_n $(n>2)$ понимается угол между их направленными нормалями. Если даны n ориентированных гиперплоскостей в E_n, пересекающихся в точке p, то определяемый ими многогранный угол измеряется площадью куска поверхности, который они вырезают из единичной сферы S_{n-1} с центром в p. Симплекс в E_n состоит из $n+1$ линейно независимых точек и $n+1$ гиперплоскостей, каждая из которых предполагается направленной в сторону точки, не лежащей на ней. Чтобы выразить величину n-гранного угла при вершине симплекса через его двугранные углы, надо выразить через меры этих $n(n+1)/2$ углов площадь поверхности сферического симплекса, вырезанного из S_{n-1} гранями многогранного угла.

Для того чтобы найти сумму S двугранных углов симплекса, выбирается точка O внутри симплекса и из нее опускаются $n+1$ перпендикуляров на грани. Обозначая сумму $(1/2)\,n(n+1)$ углов между перпендикулярами через R, получаем, что $S=(1/2)\,n\times\times(n+1)\,\pi-R$. Если построить единичную сферу с центром в O, то R будет суммой попарных расстояний (сферических) между точками $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$, в которых перпендикуляры пересекают сферу. Задача таким образом сводится к нахождению границ, между которыми заключаются суммы попарных расстояний глобальной (т. е. не помещающейся на полусфере) совокупности $n+1$ точек на единичной сфере.

Получены следующие результаты. Если A — площадь поверхности сферического симплекса на единичной S_{n-1}, Σ — сумма его двугранных углов и $C_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности S_{n-1}, то

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\pi+\frac{2(n-1)\pi}{C_n}A\geqslant\sum\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]\pi+\left[\frac{n^2}{4}\right]\frac{A}{C_n}. \qquad (1)$$

Эта формула дает соотношение между величиной многогранного угла и окружающих его двугранных углов. При $n=3$ из (1) получаем $A=\Sigma-\pi$ — известный результат для площади сферического треугольника через его двугранные углы.

Для суммы S двугранных углов симплекса E_n получены неравенства:

$$\frac{n(n-1)}{2}\pi\geqslant S\geqslant\frac{n^2-1}{4}\pi,\quad\frac{n(n-1)}{2}\pi\geqslant S\geqslant\frac{n^2}{4}\pi$$

первое для n нечетного, второе для n четного. При $n=3$ получаем: $2\pi\leqslant S\leqslant 3\pi$. Так как каждая грань симплекса в E_n есть симплекс пространства меньшего числа измерений, то полученные формулы дают возможность оценки для симплекса в E_n сумм его углов различного числа измерений. А. Г. Школьник

8234. Обобщение одного геометрического неравенства Феллера. Сантало (Generalization of a geometric inequality of Feller. Santaló L. A.), Rev. Un. Mat. Argentina, 1954, 16, 78—81 (исп.; рез. англ.)

Дается очень короткое доказательство следующего результата Уэно, Хомбу и Наито (Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., 1951, A6, 97—106). Пусть D — область внутри шара радиуса α в n-мерном пространстве постоянной кривизны $K=k^2$. Если любое r-мерное линейное подпространство $(1\leqslant r\leqslant n-1)$ пересекает D по множеству меры не больше δ, то мера D не больше

$$\delta\omega_{n-r-1}k^{r+1-n}\int_0^{\alpha}\cos^r ku\,\sin^{n-r-1}ku\,du,$$

где $\omega_i=\Gamma[(i+1)/2]\,\pi^{-(i+1)/2}/2$. Для $r=1$ и $K=0$ этот результат был раньше получен Феллером (Feller, Duke Math. J., 1942, 9, 885—892). Случай $r=1$ расширяется на произвольные римановы пространства (где одномерное подпространство — геодезическая): мера D не больше $\delta(n-1)^{-1}\omega_{n-2}\omega_{n-1}^{-1}F$, где F — площадь гиперповерхности, ограничивающей D.

H. Busemann

Перевод из Math. Revs., 1955, 16, № 5, 508.

8235. Геометрия расстояния. Направления в метрических пространствах. Кручение. Хантьес, Нотрот (Distance geometry. Directions in metric spaces. Torsion. Haantjes J., Nottrot R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 405—410; Indagationes math., 1955, 17, № 4, 405—410 (англ.)

Рассматривается метрическое пространство M со следующими свойствами:

1) для каждой точки $p_0\in M$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует сферическая окрестность $U(p_0,\delta)$, такая, что для любых $p_1, p_2, p_3\in U(p_0,\delta)$

$$E_{123}=\mathrm{Det}.\,\|F_{ij}\|>-\varepsilon\quad(i,j=1,2,3).$$

Здесь

$$F_{ij}=\frac{(p_0p_i)^2+(p_0p_i)^2-(p_ip_j)^2}{2(p_0p_i)(p_0p_j)},\quad p_i\neq p_0\neq p_j,$$

а (p_ip_j) — расстояние между p_i и p_j (в евклидовом пространстве F_{ij} есть косинус угла между отрезками p_0p_i и p_0p_j, и потому $E_{123}\geqslant 0$; в случае риманова пространства справедливость 1) также очевидна); 2) M полно; 3) M локально выпукло.

Свойство 1) позволяет ввести понятие направления в точке $p\in M$, а затем угла между двумя направлениями. Этот угол рассматривается как «расстояние» между направлениями, благодаря чему возникает метрическое пространство направлений в $p: N_1$. Отождествление противоположных направлений приводит к новому метрическому пространству N_2 — пространству касательных в p. Если C — кривая, имеющая в p касательную T, то касательные к сегментам $S(p,q)$, $q\in C$ (существующим в силу 2) и 3)) образуют подмножество C' в N_2, для которого T — предельная точка. Кручение кривой C в точке p определяется как $3\varkappa\rho/4$, где $\varkappa$ и ρ — метрические кривизны кривых C и C' соответственно. Это определение согласуется с классическим определением в римановой геометрии. А. С. Солодовников

8236. Характеристическое свойство круга, эллипса и гиперболы. Келли, Страус (A characteristic property of the circle, ellipse, and hyperbola. Kelly Paul, Straus Ernst), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 10, 710—711 (англ.)

Подэрой эллипса или гиперболы относительно фокуса служит окружность, у которой вершины кони-

ческого сечения являются концами диаметра; при этом подэры относительно обоих фокусов совпадают. Это свойство оказывается характеристическим. Доказывается следующая теорема: если кусочно-дифференцируемая кривая C имеет относительно точек p_1 и p_2 одинаковые подэры $P(C)$, то каждая дуга кривой C принадлежит коническому сечению, фокусами которого служат p_1 и p_2, а каждая дуга подэры принадлежит кругу, центр которого в средине отрезка p_1p_2. Указываются обобщения этой теоремы.

А. Г. Школьник

8237. **Точечные преобразования с гиперхарактеристическими прямыми.** Мураккини (Le trasformazioni puntuali che posseggono rette ipercaratteristiche. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 182—188 (итал.)

Рассматривается точечное преобразование T между двумя проективными пространствами S_r и $\bar{S}_r$, в котором $(A, \bar{A})$ — пара соответственных точек. Прямая a, исходящая из A, называется характеристической, если каждая кривая γ пространства S_r, касающаяся a в точке A, преобразуется посредством T и некоторой коллинеации K, касающейся T в паре $(A, \bar{A})$, в две кривые T_γ и K_γ, имеющие в $\bar{A}$ аналитическое соприкосновение 2-го порядка.

Свойства характеристических прямых исследованы ранее автором (Rend. Sem. mat. Univ. Torino, 1952/53, 159—176). Показано, при каких условиях для преобразования T существует некоторая прямая a, исходящая из A, такая, что каждая кривая γ пространства S_r, касающаяся a в точке A, преобразуется посредством T и коллинеации K_0, касательной к T в паре $(A, \bar{A})$, в две кривые T_γ и K_γ, имеющие в $\bar{A}$ аналитическое соприкосновение 3-го порядка. Такую прямую a называют гиперхарактеристической прямой, а K_0, которая является единственной,— гиперхарактеристической коллинеацией.

Рассматриваются также некоторые свойства гиперхарактеристических прямых. В. А. Маневич

8238. **Поверхности ограниченной внешней кривизны.** Погорелов А. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 163

Гладкие поверхности с ограниченной площадью сферического изображения (с учетом кратности) называются поверхностями ограниченной внешней кривизны. Для таких поверхностей определяются положительная. отрицательная и полная кривизны на любом множестве, Если положительная и отрицательная кривизны равны нулю, то поверхность развертывающаяся (в обычном смысле). Если при этом поверхность полная, то она цилиндрическая. Поверхность с плоским краем и равной нулю отрицательной кривизной выпуклая. Полная поверхность — выпуклая или бесконечная выпуклая.

Поверхности указанного класса можно аппроксимировать регулярными поверхностями с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами и поэтому они представляют собой многообразия ограниченной внутренней кривизны. Имеет место теорема Гаусса о равенстве внешних и внутренних кривизн. Поверхности ограниченной внешней кривизны, локально изометричные плоскости, — линейчатые, а с положительной внутренней кривизной — локально выпуклые. Э. Г. Позняк

8239 Д. **Аксиоматическое построение геометрии окружностей на основании сложных отношений.** Бенц (Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen. Benz Walter. — Diss. Naturwiss. Fak., Mainz, 1956. Mainz, 1956, 2 Bl.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, B, № 7, 513 (нем.)

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

8240. **Изопериметрическая задача на плоскости.** Бредон (The isoperimetric problem in the plane. Bredon Glen E.), Math. Mag., 1956, 30, № 2, 63—69 (англ.)

Решается изопериметрическая задача на плоскости (доказывается единственность и существование). В первой части задача решается элементарными средствами в классе областей, ограниченных замкнутыми выпуклыми кривыми. Вторая часть посвящена решению той же задачи для областей, измеримых по Лебегу и ограниченных спрямляемыми жордановыми кривыми.

Э. Г. Позняк

8241. **О выпуклых телах, которые могут быть вписаны в звездное тело.** Малер (Über die konvexen Körper, die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen. Mahler Kurt), Math. Z., 1956, 66, № 1, 25—33 (нем.)

Пусть S — ограниченное, открытое, центрально-симметричное тело в аффинном пространстве R_n, звездное относительно своего центра симметрии O, и K — произвольное выпуклое тело с тем же центром симметрии. Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют тела S, такие, что для каждого $K \subset S$ отношение объемов $V(K)/V(S) < \varepsilon$. С телами S можно еще связывать функционал $\Delta(S)$, равный наименьшему объему n-мерной параллелепипедальной ячейки с вершиной в O, такой, что правильная решетка, построенная параллельными переносами этой ячейки, не имеет в S вершин, отличных от O. В работе показывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют тела S, для которых $V(K)/\Delta(S) < \varepsilon$, каково бы ни было $K \subset S$.

В. А. Залгаллер

8242. **Оценки деформаций выпуклых поверхностей.** Бакельман И. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 138

Оценки деформаций радиуса-вектора (и его производных) регулярной выпуклой поверхности получаются путем оценки изменения решений уравнений Монжа—Ампера эллиптического типа в зависимости от изменения коэффициентов (с учетом изменения краевых условий). Результаты устанавливаются для общих уравнений $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ эллиптического типа, а затем применяются для оценок изменения радиуса-вектора выпуклой поверхности при изменении ее внутренней метрики. Э. Г. Позняк

8243. **Замечания о жесткости замкнутых выпуклых поверхностей.** Минагава (Remarks on the infinitesimal rigidity of closed convex surfaces. Minagawa Takizo), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 1, 41—48 (англ.)

Доказывается жесткость замкнутых выпуклых поверхностей при очень слабых предположениях как о регулярности поверхности, так и полей деформаций. Именно, пусть S — замкнутая дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая выпуклая поверхность, кривизна которой неотрицательна (S может иметь плоские куски), а допустимые поля $\bar{Z}$ деформаций принадлежат классу C^1. Тогда поле $\bar{Z}$ тривиально не на плоских частях S. Для доказательства автор подвергает S проективному преобразованию, так что образ S' этой поверхности однозначно проектируется на всю плоскость XOY. Далее исследуется поле $\bar{Z}'$ деформации S' (соответствующее полю $\bar{Z}$). Используя изящную интегральную формулу, автор показывает, что вне некоторого круга с центром в начале координат поле $\bar{Z}'$ обращается в нуль, а затем посредством остроумных рассуждений доказывает обращение в нуль этого поля на всей поверхности (последний факт не следует тривиальным образом из обращения

$\bar{Z}'$ в нуль вне круга в силу слабых условий регулярности этого поля). Э. Г. Позняк

8244. О выпуклых открытых поверхностях с интегральной кривизной 4π. Гойе (Sur les surfaces convexes ouvertes à courbure intégrale 4π. Gohier Simone), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 24, 2291—2293 (франц.)

Под выпуклой поверхностью подразумевается произвольная область огибающей выпуклого тела, т. е. тела, содержащего вместе с двумя точками все точки соединяющего их сегмента. Через всякую точку выпуклой гладкой (без ребер возврата или конических точек) поверхности проходит единственная опорная плоскость (касательная). Рассматриваются открытые гладкие выпуклые поверхности S, сферическое изображение которых покрывает всю единичную сферу.

Если две поверхности S и S' изометричны, то они или конгруэнтны или симметричны. Если взять поверхность T А. Д. Александрова (Матем. сб., 1938, 4, № 1), гомеоморфную тору, у которой ее часть, положительной гауссовой кривизны $K>0$, имеет интегральную кривизну 4π, то она отделяется от второй части отрицательной гауссовой кривизны $K<0$ двумя кривыми, лежащими в двух касательных плоскостях поверхности. С. П. Фиников

См. также: 7717 К, 7771, 7901, 8186, 8198.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

8245. Погрешности в асимптотических решениях обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Олвер (Errors in asymptotic solutions of linear ordinary differential equations. Olver F. W. J.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 2, 218—219 (англ.)

Показывается ошибочность одного результата Эванса (РЖмат, 1955, 6106). Уравнение $(n-1)$-го порядка, которому, по Эвансу, удовлетворяет погрешность (разность между решением данного уравнения n-го порядка, и отрезком его асимптотического разложения), на самом деле является тривиальным; иначе получается противоречие с элементарными фактами теории дифференциальных уравнений. А. П. Лавут

8246. «Соприкасающаяся экстраполяция» — новый метод численного интегрирования дифференциальных уравнений. Солзер (Osculatory extrapolation and a new method for the numerical integration of differential equations. Salzer Herbert E.), J. Franklin Inst., 1956, **262**, № 2, 111—119 (англ.)

Рассматриваются формулы для экстраполирования с двукратными узлами в вещественной (комплексной) области и показывается применимость их для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Даны формулы с вычисленными числовыми коэффициентами и указаны остаточные члены. Одна из таких формул, имеющая интерес при численном решении дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ в вещественной области, имеет вид: $y(a+2h)=5y(a)-y(a+h)+2h[f(a,y(a))+2f(a+h,y(a+h))]+\frac{h^4}{6}y^{(4)}(\xi)$. Ш. Е. Микеладзе

8247. Приближенное решение уравнения поля посредством сетки, составленной из дуг окружностей. Тасный-Часный (Nets composed of parts of circles for the approximate solution of field problems. Tasny-Tschiassny L.), Austral. J. Phys., 1955, **8**, № 1, 8—29 (англ.)

Для приближенного решения эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами используется моделирующая электрическая сетка (искомую функцию доставляют значения потенциала в узлах сетки). При этом сетка состоит из подходяще выбранных «криволинейных прямоугольников». Как показывают приведенные два примера, такая сетка при небольшом числе узлов дает сравнительно хорошую точность. В. К. Саульев

8248. Простой способ улучшения точности решений уравнений Лапласа и Пуассона на электрической сетке из сопротивлений. Ландау (A simple procedure for improved accuracy in the resistor-network solution of Laplace's and Poisson's equation. Landau H. G.), J. Appl. Mech., 1957, **24**, № 1, 93—97 (англ.)

Обстоятельно показывается, что точность решения конечноразностных уравнений Лапласа и Пуассона на квадратной сетке шага h из омических сопротивлений величиной R может быть значительно повышена путем добавления диагональных сопротивлений величиной $4R$. Если ошибка метода при обычной квадратной сетке оценивается членом $\frac{h^2\rho^2M^{IV}}{24}$, то при добавлении к этой сетке диагональных сопротивлений ошибка метода может быть оценена членом

$$\frac{h^6\rho^2M^{VIII}}{12096}.$$

Здесь: ρ — радиус наименьшей окружности, в которую может быть вписана исследуемая область, а M^{IV} и M^{VIII} — максимумы четвертой и восьмой производных. Приводится пример решенной (в Колумбийском университете) инженерной задачи на упругое кручение бруса прямоугольного сечения. Диагональная сетка может быть использована и для улучшения точности решения бигармонических уравнений, имеющих место в теории упругости. Указывается, что несовпадение области конечноразностного аналога с действительной криволинейной областью является главным источником ошибок. Однако этот вопрос в работе не освещается. В приложениях 1 и 2 приводятся подробные математические выкладки. Библ. 11 назв.

Г. К. Кузьминок

8249. О методе прямых для некоторых краевых задач для систем уравнений с частными производными. Будак Б. М., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 2, 187—190

Доказывается сходимость метода прямых для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в прямоугольнике и оценивается погрешность, допускаемая при решении, через погрешность аппроксимации дифференциального оператора дифференциально-разностным и через величину нормы оператора, обратного к дифференциально-разностному.

Оценка нормы обратного оператора проведена для следующих задач: (везде область изменения независимых переменных—прямоугольник D: $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant e_1\\0\leqslant y\leqslant e_2\end{cases}$

1) Задача Гурса:

$$\bar{u}_{xy} - \bar{A}(x, y)\,\bar{u} = \bar{f}(x, y),$$

$$\bar{u}_{x=0} = \bar{\varphi}(y),\ \bar{\varphi}(0) = \bar{\psi}(0),\ \bar{u}|_{y=0} = \bar{\psi}(x).$$

Здесь $\bar{A}(x, y)$ — квадратная матрица, $\bar{f}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ — столбцовые матрицы с элементами — достаточно гладкими функциями в D.

2) Краевая задача:

$$\bar{R}(x)\,\bar{u}_{yy} - (\bar{s}(x)\,\bar{u}_x)_x + \bar{Q}(x)\,\bar{u} = \bar{f}(x, y),$$

$$\bar{u}(0, y) = \bar{\mu}(y),\quad \bar{u}(l_1, y) = \bar{\nu}(y),$$

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{\varphi}(x),\quad \bar{u}_y(x, 0) = \bar{\psi}(x);$$

$\bar{R}(x)$, $\bar{s}(x)$ — положительно определенные, а $\bar{Q}(x)$ — неотрицательно определенная симметричные матрицы с элементами — достаточно гладкими функциями x.

3) Обобщенная система телеграфных уравнений:

$$\bar{L}\bar{i}_y + \bar{R}\bar{i} + \bar{v}_x = 0,\quad \bar{c}\bar{v}_y + \bar{G}\bar{v} + \bar{i}_x = 0,$$

$$\bar{v}(0, y) = \bar{\mu}(y),\quad \bar{v}(e_1, y) = \bar{\nu}(y),$$

$$\bar{v}(x, 0) = \bar{\varphi}(x),\quad \bar{i}(x, 0) = \bar{\psi}(x),$$

где $\bar{L}$ и $\bar{c}$ — симметричные положительно определенные, а $\bar{R}$ и $\bar{G}$ — неотрицательно определенные постоянные матрицы, $\bar{\mu}(y)$, $\bar{\nu}(y)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — столбцовые матрицы.

А. Л. Дышко

8250. Разностный метод расчета ударных волн. Годунов С. К., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 176—177

Дается способ расчета разрывных решений уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v, E)}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (E + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0,$$

основное содержание которого заключается в следующем. Разбивая газ на слои и считая в начальный момент в каждом слое величины u, v, E постоянными, в последующем на границе двух соседних слоев вследствие распада начального разрыва образуются скорость и давление, остающиеся постоянными до подхода волн разрывов с соседних границ, поэтому средние значения в слое к концу этого промежутка вычисляются по закону сохранения. Проведенные по данной схеме расчеты на электронных вычислительных машинах, по словам автора, дали удовлетворительные результаты. Д. Е. Долидзе

8251. О новом методе решения «в целом» некоторых нелинейных дифференциальных уравнений на быстродействующих цифровых вычислительных машинах. Вогеларе (On a new method to solve in the large some nonlinear differential equations using high speed digital computers. Vogelaere René), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 184—185, 227 (англ.; рез. нем.)

Предлагается следующий метод для получения решения «в целом» нелинейных дифференциальных уравнений (под решением «в целом» понимается полное решение задачи или, по крайней мере, получение необходимой информации о всевозможных решениях данного уравнения). Производятся некоторые вычисления и полученная количественная информация применяется в последующих теоретических исследованиях, которые дают новые результаты. Если они не достаточны, то процесс повторяется до тех пор, пока не будут получены все решения нелинейного дифференциального уравнения.

В качестве примера рассматриваются уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U(x, y, a)}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U(x, y, a)}{\partial y}. \qquad (1)$$

Относительно $U(x, y, a)$ делается следующее предположение $U(x, y, a) = U(x, -y, a)$. Ищутся периодические решения уравнения (1), пересекающие ось x. Строятся кривые, точки пересечения которых соответствуют периодическим симметричным решениям. В зависимости от количества точек пересечения этих кривых между собой, делаются те или иные теоретические заключения относительно последующих решений. Если эти выводы недостаточны для получения общего решения, то строятся следующие кривые, точки пересечения которых определяют следующие периодические симметричные решения. Вычисляется количество точек пересечения этих кривых между собой и эта информация затем опять применяется для теоретических исследований и т. д.

Указывается, что описанный метод с успехом был применен к задаче Штормера и к уравнению Дюффинга. Основные вычисления проводились на машине СЕАК.

М. А. Алексидзе

8252. О методе осреднения функциональных поправок. Соколов Ю. Д., Укр. матем ж., 1957, 9, № 1, 82—100 (рез. франц.)

Автор применяет свой метод (РЖМат, 1956, 2462) к неоднородным интегральным уравнениям второго рода типа Фредгольма $y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi$; при некоторых предположениях установлена сходимость решений построенного процесса к точному решению уравнения, получена оценка погрешности. Отмечена справедливость результатов также для уравнения $u(P) = \varphi(P) + \int_B K(P, Q)\,u(Q)\,d\omega_Q$, в котором $u(P)$ и $\varphi(P)$ — функции точки в некоторой ограниченной области B любого числа измерений. Далее метод применен к одномерной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка и к задаче нахождения решения линейного дифференциального уравнения эллиптического типа. Метод проиллюстрирован на различных примерах, свидетельствующих об эффективности метода. Указаны приемы, которые можно использовать для улучшения приближений. Э. А. Чернышенко

8253. Итерационный метод односторонних приближений решения операторных уравнений. Слугин С. Н., Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 1, 117—124

Пусть X — полуупорядоченное пространство, x_0, $\bar{x}_0 \in X$, $\underline{x}_0 \leqslant \bar{x}_0$. Пусть Γ и Λ — аддитивные положительные операторы из X в X, существует положительный $(I - \Lambda)^{-1}$ и при $x \geqslant 0$ $\lim_{n\to\infty} (\Gamma + 2\Lambda)^n x = 0$. Пусть также монотонно непрерывный оператор V из X в X удовлетворяет условиям: $\Lambda(\Delta x) \geqslant V(x + \Delta x) - V(x) \geqslant -\Gamma(\Delta x)$ при $\Delta x \geqslant 0$, $\Lambda(\bar{x}_0 - \underline{x}_0) \leqslant V(\bar{x}_0) - x_0$, $\Lambda(\bar{x}_0 - \underline{x}_0) \leqslant \bar{x}_0 - V(\underline{x}_0)$. Доказывается теорема: уравнение $x = V(x)$ имеет единственное решение, к которому монотонно сходятся рекуррентно определяемые последовательности: $x_{n+1} = x_n - (I - \Lambda)^{-1}(x_n)$, $x_0 = \underline{x}_0$ или $x_0 = \bar{x}_0$. Теорема применяется к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка, к дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом и к нелинейным интегральным уравнениям.

А. Н. Балуев

8254. Принцип Гамильтона как способ вычисления. Миллер (Hamilton's principle as a computational device. Miller P. H., Jr), Amer. J. Phys., 1957, 25, № 1, 30—32 (англ.).

Вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt = 0$$

кладется в основу для приближенного решения некоторых задач динамики (математический маятник, движение тяжелой точки по заданной параболе, движение планеты). Решения ищутся в виде тригонометрических рядов, а неопределенные параметры определяются из условия минимума действия. В рассмотренных случаях показано, что получается хорошая точность решения. Например, в случае маятника найденный период колебания для отклонений, не превышающих 90°, отличается от истинного не более, чем на 0,2%.

И. С. Аржаных

8255. О формулах численного дифференцирования без разностей. Гроссман Д. П., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, вып. 61, 30—36

Доказывается теорема относительно справедливости формулы численного дифференцирования

$$h^k f^{(k)}(a) \approx \sum_{r=1}^{n} A_r f(a + t_r h) \quad (0 < k < n),$$

для достаточно малых значений h, опубликованная автором ранее без доказательства (РЖМат, 1954, 3466).

Ш. Е. Микеладзе

8256. Преобразования Эйлера с центральными разностями и другие его формы. Уинн (Central difference and other forms of the Euler transformation. Wynn P.), Quart J. Mech. and Appl. Math., 1956, 9, № 2, 249—256 (англ.)

Исходя из преобразования Эйлера для ряда $\sum (-1)^k v_k a^k$, использующего обычные разности Δv_k, выводятся другие формы преобразования, например форма Стирлинга с центральными разностями:

$$\sum_{k=0} (-1)^k v_{m+k} a^k = \frac{1}{1+a} v_m + \sum_{s=1} (-1)^s A_s(a)\, \mu \delta^{2s-1} v_m + \sum_{s=1} (-1)^s B_s(a)\, \delta^{2s} v_m,$$

где $\mu = (E^{1/2} + E^{-1/2})$, $\delta = E^{-1/2}\Delta$, $E = 1 + \Delta$, $A_s(a) = \frac{a^s}{(1+a)^{2s}}$, $B_s(a) = \frac{(1-a)\, a^s}{2(1+a)^{2s+1}}$

Указывается, что эти формулы особенно интересны для асимптотических альтернирующих рядов. Дается таблица $A_s(a)$, $B_s(a)$. Разобран числовой пример.

А. П. Лавут

8257. Модифицированная интерполяционная формула Чебышева—Эверетта. Чисналл (A modified Chebyshev—Everett interpolation formula. Chisnall G. A.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 54, 66—73 (англ.)

Интерполяционная формула Эверетта представляется через последовательные полиномы Чебышева:

$$f(m) = f(0) + m\Delta_{1/2} + E_0''\Delta_0'' + E_1''\Delta_1'' + \ldots + E_0^{(2n)}\Delta_0^{(2n)} + E_1^{(2n)}\Delta_1^{(2n)} = f(0) + m\Delta_{1/2} + \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_0^{(j)} C_{2j+1} \times \left\{ (2-2m)\cos\frac{\pi}{4j+2} \right\} + \beta_1^{(j)} C_{2j+1} \left\{ 2m\cos\frac{\pi}{4j+2} \right\} \right] =$$

$$= f(0) + m\Delta_{1/2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\sec^{2j+1}\left(\frac{\pi}{4j+2}\right)}{2^{2j+1}(2j+1)!} \times \left[N_0^{(2j)} C_{2j+1} \left\{ (2-2m)\cos\frac{\pi}{4j+2} \right\} + N_1^{(2j)} C_{2j+1} \left\{ 2m\cos\frac{\pi}{4j+2} \right\} \right], \quad (1)$$

где C_{2j+1} — полиномы Чебышева соответствующего порядка, а $N_0^{(2j)}$ и $N_1^{(2j)}$ — модифицированные разности. Они определяются из соотношения (1). При сохранении разностей до 10 порядка модифицированные разности имеют вид:

$$N^{X} = \Delta^{X}$$

$$N^{VIII} = \Delta^{VIII} + a_5\Delta^{X}$$

$$N^{VI} = \Delta^{VI} + a_4\Delta^{VIII} + b_5\Delta^{X}$$

$$N^{IV} = \Delta^{IV} + a_3\Delta^{VI} + b_4\Delta^{VIII} + c_5\Delta^{X}$$

$$N^{II} = \Delta^{II} + a_2\Delta^{IV} + b_3\Delta^{VI} + c_4\Delta^{VIII} + d_5\Delta^{X}$$

Численные значения коэффициентов a, b, c, d и $\beta_{0,1}^{(j)}$ приводятся. Иллюстрирующий пример показывает, что формула обладает высокой точностью.

К. А. Карпов

8258. Приближение функций ортогональными многочленами. Секстон (Curve fitting with orthogonal polynomials. Sexton Charles R.), Prod. Engng, 1956, 27, № 4, 171—175 (англ.)

Излагается для инженеров путь отыскания многочленов, дающих наилучшее среднее квадратическое приближение данной функции на конечном множестве точек. Указываются таблицы и рациональная схема вычислений.

С. С. Калиновская

8259. Конструкция приближенных формул. Гурматай (Construction de formules approchées. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1956, 65, № 10, 505—508 (франц.)

Исходя из конкретных примеров, автор указывает один путь построения приближенных формул с помощью исключения некоторых степеней x из двух или нескольких рядов и путь оценки точности получаемых формул в рассматриваемых границах изменения x. Дается такая формула для вычисления длины дуги эллипса.

С. С. Калиновская

8260. Об автоматическом регулировании шага в квадратурных формулах. Уилкс (A note on the use of automatic adjustment of strip width in quadrature. Wilkes Maurice V.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 182—183, 227 (англ.; рез. нем.)

Описывается программа для табулирования функции

$$\mathrm{ch}(x, \chi) = x \sin\chi \int_0^{\chi} \exp(x - x\sin\chi/\sin\lambda)\, \mathrm{cosec}^2\lambda\, d\lambda.$$

при $\chi = 20°$ (1°) 100° и $x = 50$ (50) 500 (100) 1000, основанная на формуле Гаусса с нечетным числом абсцисс. Программа сама подбирает, на отдельных участках табулирования, оптимальное значение шага интегрирования $h_{опт}$. За $h_{опт}$ берется максимальное

значение шага, обеспечивающего требуемую точность на данном отрезке. Этот метод особенно эффективен (в смысле сокращения машинного времени) в том случае, когда $h_{опт}$ меняется в широких пределах.

Приводится участок таблицы, иллюстрирующий порядок вывода информации из машины. Предлагается применить метод регулирования шага при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутта. М. А. Алексидзе

8261. **О вычислении некоторых интегралов в теории дифракции Френеля. Китахара** (Freshel 回折の理論に現れる一種の積分の計算について. 北原隆), 金澤大學教育學部紀要, Канадзава дайгаку кёикугакубу киё, Bull. Fac. Educ. Kanazawa Univ., 1957, № 5, 115—124 (японск., рез. англ.)

Вычисляются интегралы типов

$$\int e^{-hx}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx \text{ и } \int e^{-hx}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx,\ h\geqslant 0.$$

При этом числовые значения получены для $h=0{,}1$; 0,4 и 1,0; $x=-2{,}5\sim+2{,}5$.

8262. **Упрощенный метод нахождения коэффициентов Фурье. Гиббонс** (A simplified procedure for finding Fourier coefficients. Gibbons J. F.), Proc. I. R. E., 1957, 45, № 2, 243 (англ.)

Рассматривается метод определения коэффициентов ряда Фурье четной функции, имеющей точки разрыва первого рода в самой функции или ее производных. Производя формальное дифференцирование ряда Фурье, автор приводит графическое дифференцирование аппроксимируемой функции и использует обычное свойство дельта-функции. Метод применим при наличии нескольких точек разрыва у производных разного порядка. К. Е. Чернин

8263. **О разложении функции в ряды Фурье на счетно-аналитических и электронных машинах. Гонтковская В. Т.**, Бюл. Сталинаб. астрон. обсерв., 1957, № 19, 3—9

Приводится схема проведения приближенных вычислений коэффициентов разложения функции в ряд Фурье на табуляторе и мультиплейере. Схема дана для n=16 при простейших формулах без уточнений. Приведена также программа вычислений коэффициентов на быстродействующей трехадресной электронной машине. К. Е. Чернин

8264. **Конечно-разностный метод для решения систем линейных алгебраических уравнений. Чжао-Фансюн** (解聯立方程的差分方程法. 趙訪熊), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1955, 5, № 2, 149—159 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается решение систем n линейных уравнений как решение первых n уравнений некоторого линейного разностного уравнения с соответствующими нулевыми начальными и конечными значениями. На основе этого дан простой метод для решения уравнения табулированием. В случае отсутствия нулевого коэффициента, в результате каждого табулирования исключается одно неизвестное, а в случае наличия нулевого коэффициента — по крайней мере два неизвестных. Для решения системы трехчленных уравнений достаточно одно табулирование. Ши Чжун-Цы
Цзэн Кэнь-чэн

8265. **Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Задунайский** (Un metodo de iteracion para la resolucion de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas. Zadunaisky Pedro E.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 335—343 (исп.)

Приводится один из итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^{r} A_{ij}x_j+\sum_{k=r+1}^{n} a_{ik}x_k=k_i\quad (i=1,\ \ldots,\ r)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j+\sum_{k=r+1}^{n} A_{lk}x_k=k_l\quad (i=r+1,\ \ldots,\ n)$$

где заглавными буквами обозначены преобладающие коэффициенты.

Если обозначить через A_{ij} A_{lk}, a_{ik}, a_{lj} квадратные матрицы порядка n, все элементы которых равны нулю за исключением тех, у которых $\{i$ или $j\}\leqslant r$ и $\{k$ или $l\}>r$, а через x_j, k_l и x_k, k_l — матрицы того же порядка, элементы которых равны нулю, за исключением соответственно первых r или последних $n-r$ элементов первого столбца, то предлагаемый в статье итерационный процесс сводится к последовательному применению формул

$$x_j^{(\nu)}=A_{ij}^{-1}\left\{k_i-a_{ik}x_k^{(\nu-1)}\right\}$$

$$x_k^{(\nu)}=A_{lk}^{-1}\left\{k_l-a_{lj}x_j^{(\nu-1)}\right\}$$

Даются достаточные условия сходимости приведенного метода итерации. Э. Апарисио

8266. **Итерационные методы линейной алгебры, обладающие сходимостью типа Бернулли. Бауэр** (Iterationsverfahren der linearen Algebra vom bernoullischen Konvergenztyp. Bauer Friedrich L.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 171—175, 221. Diskuss., (нем.; рез. англ.)

Автор вводит понятие итерационного процесса линейной алгебры, обладающего сходимостью типа Бернулли: если сходимость процесса происходит от того, что во взвешенной сумме

$$a_i=e_1d_1^i+e_2d_2^i+\ldots+e_md_m^i$$

один член в конце концов превосходит по модулю все остальные, то это — сходимость типа Бернулли. При этом d_μ — (вещественные или комплексные) собственные значения (или произведения двух, трех и т. д. собственных значений) некоторой матрицы, связанной с итерационным процессом, e_μ — веса — начальные значения, выбираемые произвольно или почти произвольно; величины a_i удовлетворяют разностному уравнению Бернулли Если процесс сходится, то сходимость линейная. Это значит, что $f_{i+1}=\left|\frac{d_{k'}}{d_k}\right|f_i$, где f_i — погрешность i-го шага, d_k — «ведущий» элемент, т. е. элемент, имеющий наибольший модуль, а d_k' — следующий за ним по модулю элемент.

В большинстве случаев вполне достаточно ограничиться линейной сходимостью, особенно принимая во внимание работы на вычислительных автоматах. Здесь не играет особой роли и выбор начального значения, важно лишь, чтобы процесс был сходящийся, что имеет место «почти всегда». Именно благодаря работе на машинах в последнее время приобретают значение такие процессы, которые обладают лишь линейной сходимостью. Счастливым обстоятельством является то, что большинство процессов линейной алгебры, обладающих сходимостью типа Бернулли, допускает приемы сокращенной итерации, которые улучшают сходимость, делая ее квадратичной, т. е. такой, что $f_{k+1}=\frac{1}{\text{const}}f_k^2$. Такую сходимость автор называет сходимостью типа Грэффе.

. Затем автор рассматривает прием ступенчатой ите-рации (Treppeniteration), из которой посредством спе-иализации получается ряд приемов, обладающих сходимостью типа Бернулли, а посредством сокращения олучаются итерации со сходимостью типа Грэффе. Рассматривается также вопрос о решении систем линей-ых уравнений и об обращении матриц и некоторые другие вопросы. М. С. Горнштейн

8267. **Метод табулирования для решения системы линейных алгебраических уравнений. Чжао Фан-сюн** (趙訪熊), 土木工程學報, Туму чунчэн сюэбао, Chinese J. Civil Engng, 1956, 3, № 4, 463—474 (кит.; рез. англ.)

Дан метод табулирования для решения системы n линейных алгебраических уравнений. При решении n линейных уравнений общего типа этим методом нужно выполнить

$$\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)+\frac{5}{2}n(n-1)+n$$

операций умножения или деления, а для решения n трехчленных уравнений только $6n-5$ таких операций.

Ши Чжун-Цы
Цзэн Кэнь-чэн

8268. **Упрощенная схема решения систем линейных алгебраических уравнений. Губерман** (Спрощена схема розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Губерман І. О.), Прикл. механіка, 1957, 3, № 1, 108—112, (укр., рез. русск.)

8269. **Достоинства способа наименьших квадратов в борьбе с односторонними ошибками измерений. Болотин А. И.**, В сб.: 15-я научн. конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1957, 433—435

8270. **Об аналогии теорем Фредгольма и Фрама и об обращении матрицы. Шанкс** (On analogous theorems of Fredholm and Frame and on the inverse of a matrix. Shanks Daniel), Quart Appl. Math., 1955, 13, 95—98 (англ.)

Алгоритм Фрама получения характеристического уравнения матрицы состоит в следующем: Пусть $A=(a_{ij})$ — произвольная квадратная матрица порядка N;

$$\lambda^N+p_1\lambda^{N-1}+p_2\lambda^{N-2}+\ldots+p_N=0$$

— ее характеристический многочлен.

Строим рекуррентно такую систему: $A_0=0$; $a_0=1$;

$A_n=A(A_{n-1}+a_{n-1}E)$; $a_n=-\frac{1}{n}(\text{след}\quad A_n)$ (здесь

A_i — матрицы N-го порядка, a_i — числа; E — единичная матрица). Тогда $a_n=p_n$, $A_{N+1}=0$.

Выводится следующая основная формула для обращения матрицы:

$$B^{-1}=E+\frac{\sum_0^N A_n}{\sum_0^N a_n}\quad (B=E-A). \tag{1}$$

Соответствующая система линейных уравнений имеет вид:

$$x_i-\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j=f_i\quad (i,\ j=1,\ldots,N). \tag{2}$$

Ставится вопрос о приближении B^{-1} матрицей:

$$E+\frac{\sum_0^r A_n}{\sum_0^r a_n},\ \text{где } r<N. \tag{3}$$

Для этого рассматривается алгоритм Фредгольма получения резольвенты уравнения

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ y)\,u(y)\,dy=f(x). \tag{4}$$

Этот алгоритм таков:

$$K_0(x,\ y)=0,\quad k_0=1,$$

$$K_n(x,\ y)=\int_a^b K(x,\ t)\,K_{n-1}(t,\ y)\,dt+k_{n-1}K(x,\ y);$$

$$k_n=-\frac{1}{n}\int_a^b K_n(t,\ t)\,dt.$$

Резольвента имеет вид:

$$R(x,\ y)=\frac{\sum_0^\infty K_n(x,\ y)}{\sum_0^\infty k_n\lambda}. \tag{5}$$

Показывается, что если $a=0$, $b=N$ и в качестве $K(x,\ y)$ и $f(x)$ взять ступенчатые функции

$$\lambda K(x,\ y)=a_{ij}=\text{const},\quad i-1\leqslant x\leqslant i$$
$$f(x)=f_i=\text{const},\qquad j-1\leqslant y\leqslant j,\qquad (i,\ j=1,\ldots,N)$$

то для этого вырожденного ядра

$$u=\left(E+\frac{\sum_0^N A_u}{\sum_0^N a_n}\right)f,\ \text{где } A_n=K_n(x,\ y)\lambda^n,$$
$$a_n=k_n\lambda^n,$$

С другой стороны, (4) в этом случае есть система линейных уравнений вида (2). Отсюда следует указанная в заголовке аналогия, а также возможность перенесения соответствующих результатов теорий уравнений Фредгольма на метод Фрама обращения матриц.

А. Л. Дышко

8271. **О совместном численном обращении матрицы и всех ее главных миноров. Нагler** (On the simultaneous numerical inversion of a matrix and all its leading submatrices. Nagler H.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, 10, № 56, 225—226 (англ.)

Имеет место известное разложение матрицы A с отличными от нуля главными минорами на произведение двух треугольных матриц X и Y с единицами на главной диагонали и диагональной матрицы D: $A=X'DY$. Если обозначить через A_r, X_r', D_r, Y_r матрицы, образованные элементами r главных миноров соответствующих матриц, то аналогично имеет место: $A_r=X_r'D_rY_r$ и $A_r^{-1}=Y_r^{-1}D_r^{-1}X_r'^{-1}$ $(r=1,\ \ldots,\ n)$.

Отсюда видно, что так как $(i,\ j)$ элемент A^{-1} равен скалярному произведению i строки матрицы $Y^{-1}D^{-1}$ на j строку матрицы X^{-1}, то $(i,\ j)$ элементы матриц A_r^{-1} будут получаться как частные суммы упомянутого скалярного произведения.

А. П. Ершов

8272. Применение метода экстраполяции к матричным методам в проблемах диффузии нейтронов. Мак-Криди (Extrapolation techniques applied to matrix methods in neutron diffusion problems. McCready Robert R. Rept. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., 1956, № 1283, 10 pp., ill.) (англ.)

Для нахождения первого собственного значения γ и соответствующего собственного вектора X матричного уравнения $AX = \gamma BX$ используется следующая итерационная схема:

$$X_{k+1} = \gamma_{k+1} L^{-1} B X_k - L^{-1} U X_k,$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{(\operatorname{sgn} L^{-1} B X_k,\ (I + L^{-1} U) X_k)}{(\operatorname{sgn} L^{-1} B X_k,\ L^{-1} B X_k)},$$

где $A = L + U$ (L — левая нижняя треугольная матрица с главной диагональю, U — правая верхняя треугольная матрица без главной диагонали),

$$\operatorname{sgn} w = \begin{cases} 1, & \text{если } w > 0, \\ 1, & \text{если } w < 0, \\ 0, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Для ускорения сходимости процесса применяется экстраполяция, в простейшем случае имеющая вид

$$X' = \frac{X_3 - \tau^2 X_1}{1 - \tau^2},$$

где τ_2 находится, как наименьший корень некоторого трансцендентного уравнения.

Рассматриваемый метод применен к расчету критического реактора в диффузионно-возрастном приближении при двух энергетических группах и при использовании обычных разностных отношений.

В. К. Саульев

8273. Решение алгебраических уравнений. Комплексные корни (Solution of algebraic equations: Complex roots), Electronic and Radio Engr, 1957, 34, № 3, 107—108 (англ.)

Вопрос о нахождении комплексных корней алгебраических уравнений рассматривается на частном примере уравнения четвертой степени $F(x) = x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 11x + 9 = 0$, имеющего две пары сопряженных комплексных корней. Предлагается следующий метод для нахождения корня с наименьшим модулем: взяв три последних члена данного уравнения и разделив на коэффициент при x^2, получим $f_0(x) = x^2 + 0{,}92x + 0{,}75$. Разделив $F(x)$ на $xf_0(x)$, получим в остатке трехчлен второй степени, который после деления на коэффициент при x^2 примет вид $f_1(x) = x^2 + 1{,}01110x + 0{,}97468$. Разделив снова $F(x)$ на $xf_1(x)$, получим приведенный остаток $f_2(x) = x^2 + 1{,}00523x + 0{,}99841$. Далее возможны два пути: 1) Повторить с $f_2(x)$ тот же процесс, который был проделан с $f_0(x)$. 2) Если же сходимость медленная, то можно поступить следующим образом: обозначив через p_0, p_1, p_2 корни трехчленов $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, имеющие положительные мнимые части, составить выражение $p = p_0 + \frac{(p_1 - p_0)^2}{2p_1 - p_0 - p_2}$, затем составить трехчлены, имеющие корни p и $\bar{p}$ (сопряженный с p) и с этим трехчленом повторить процесс, который был проделан с $f_0(x)$. Автор замечает, что редко потребуется повторить этот процесс больше двух раз.

Затем указывается на двоякого рода трудности, которые могут встретиться: 1. Процесс будет сильно расходиться. Это указывает на наличие у уравнения вещественных корней, абсолютные величины которых меньше модулей комплексных корней. 2. Уравнение имеет равные или почти равные корни. Дается способ обойти эту трудность. Выводов нет. М. С. Горнштейн

8274. Прямой итерационный процесс для разложения многочлена на два множителя, из которых один — многочлен Гурвица. Бауэр (Ein direktes Iterationsverfahren zur Hurwitz-Zerlegung eines Polynoms) Bauer Friedrich L.), Arch. elektr. Übertrag., 1955, 9, № 6, 285—290 (нем.; рез. англ.)

В теории электрических сетей часто приходится решать такую задачу: вещественный четный многочлен $Q(\lambda^2)$ степени $2n$ разложить на два вещественных множителя $Q(\lambda^2) = E(\lambda) E(-\lambda)$, причем так, чтобы $E(\lambda)$ не имел нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ($E(\lambda)$ — многочлен Гурвица). Предполагается, что $Q(\lambda^2)$ не имеет чисто мнимых корней. При помощи подстановки $\lambda = q \cdot \frac{z+1}{z-1}$ левая полуплоскость $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ отобразится на внутренность единичного круга плоскости z, и многочлен $Q(\lambda^2)$ переводится в возвратный многочлен (т. е. многочлен, коэффициенты которого, равно отстоящие от начала и конца, равны между собою) степени $2n$ от z (при $q = 1$):

$$B(z) = b_0 z^{2n} + b_1 z^{2n-1} + \ldots + b_{n-1} z^{n+1} + b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

Составляется бесконечная матрица B, на главной диагонали которой стоит «средний» коэффициент b_n, а на диагоналях, параллельных главной, как сверху так и снизу стоят последовательно коэффициенты b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0; следующие диагонали состоят сплошь из нулей. Затем эта матрица, начиная сверху слева, разлагается на произведение двух треугольных матриц — нижней L и верхней U, причем так, чтобы элементы обеих матриц, стоящие на главной диагонали, были равны между собою. Так как матрица B симметрическая, то одна из матриц L и U будет транспонированной относительно другой, и мы получим $B = u^T U$. На основании этого соотношения можно вычислить элементы матрицы U, пользуясь методом итерации.

Корнями многочлена $U(z) = u_0 z^n + u_1 z^{n-1} + \ldots + u_{n-1} z + u_n$ являются те корни многочлена $B(z)$, модули которых меньше 1. Остальные корни $B(z)$ являются корнями многочлена

$$U^T(z) = u_n z^n + u_{n-1} z^{n-1} + \ldots + u_1 z + u_0 = z^n \tilde{U}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Выполнив таким способом разложение многочлена $B(z)$ на два множителя, производя обратное преобразование; при этом, с точностью до постоянного множителя, получается требуемое разложение $Q(\lambda^2) = E(\lambda) E(-\lambda)$.

Автор подсчитывает число арифметических действий, которые требуется выполнить при одном шаге итерации. Он указывает, что сходимость процессов — линейная. Разложение это может быть произведено на вычислительных машинах, но его можно рекомендовать и вычислителям, работающим обычными средствами, по крайней мере, для улучшения разложения, полученного каким-нибудь другим способом. М. С. Горнштейн

8275. Итеративный метод разложения в ряд Тейлора рациональных дробей и его приложения. Флем

минг (An iterative method for Taylor expansion of rational functions, and applications. Fleming D. P.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, 10, № 55, 120—130 (англ.)

Пусть

$$f(s)=\frac{p_0(s)}{q(s)}=a_0+a_1(s-a)+a_2(s-a)^2+\ldots,$$

где p_0 и q суть многочлены, расположенные по степеням s. Для нахождения коэффициентов a_j рекомендуется следующий алгорифм:

$$a_j=p_j(a)\,q(a),\quad \varphi_{j+1}(s)=p_j(s)-a_jq(s),$$

$$p_{j+1}(s)=(s-a)^{-1}\varphi_{j+1}(s)\quad (j=0,\ 1,\ \ldots).$$

Так как вычисление $q(a)$, $p_j(a)$ может быть осуществлено делением на $s-a$, то вычисления сводятся к операции деления многочлена на одночлен.

Пусть требуется разложить рациональную дробь $N(s)/D(s)$ на сумму простейших

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A_{11}}{s-s_1}+\ldots+\frac{A_{1n_1}}{(s-s_1)^{n_1}}+h(s)$$

(степень N ниже степени D, s_1 есть n_1 — кратный корень D). Если положить $D(s)=(s-s_1)^{n_1}D_1(s)$, то

$$\frac{N(s)}{D_1(s)}A_{1n_1}+\ldots+A_{11}(s-s_1)^{n_1-1}+(s-s_1)^{n_1}h(s)$$

и указанный выше алгорифм позволит определить $A_{1n_1}\ldots A_{11}$. Указываются и другие приложения.

М. К. Гавурин

8276. **Приближенные уравнения для экспериментальных данных. Кокс** (Fitting equations to experimental data. Cox A. Bruce), Mach. Design, 1957, 29, № 2, 95—99 (англ.)

Популярно излагается способ получения формул по экспериментальным данным с помощью метода конечных разностей. С. С. Калиновская

8277. **Новая приближенная формула длины дуги эллипса. Вундерлих** (Eine neue Näherungsformel für den Ellipsenumfang. Wunderlich W.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 11—12, 465—466 (нем.)

Для эллиптического интеграла

$$u=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

получена приближенная формула

$$u\approx\frac{\pi}{4}\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right],$$

являющаяся точной при $a=b$. Имеется номограмма для облегчения вычислений. Я. И. Алихашкин

8278. **Накопление ошибок в цифровых машинах. Хаусхолдер** (Generation of errors in digital computation. Householder Alston S.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 3, 234—247 (англ.)

При нахождении численного значения $f(x)$ значение аргумента x часто известно не точно. Поэтому берется некоторое приближение x^*, так что вместо $f(x)$ вычисляется $f(x^*)$. Функцию f также часто приходится заменять некоторым приближением f_a. Если f_a представляет собой конечную последовательность элементарных операций, то и в этом случае произведение и частное получаются не точно, поэтому, вообще говоря, получается не $f_a(x^*)$, а $f^*(x^*)$.

Общую ошибку можно представить в виде трех независимых ошибок:

$$f(x)-f^*(x^*)=[f(x)-f(x^*)]+[f(x^*)-f_a(x^*)]+[f_a(x^*)-f^*(x^*)].$$

Первая и вторая ошибки не зависят от вычислительной техники и определяются точностью получения x и требуемого приближения функции f. Третья (порожденная) ошибка зависит не только от особенностей конструкции вычислительных машин, но и от того, как они используются. Различия в существующих машинах таковы, что каждая из них требует своей теории для порожденной ошибки.

Цель автора установить некоторые общие принципы и проиллюстрировать их на конкретной вычислительной машине (ОРАКЛ) с фиксированной запятой. На примере вычисления величины a/bc устанавливается, что получается различная точность в зависимости от порядка вычислений: $a/(bc)$ или $(a/b):c$. Получаемая погрешность зависит от величин a, b и c. Автор рекомендует в аналогичных случаях предусматривать в программе оба варианта и в зависимости от исходных величин вычисления пойдут по одному из них. Затем, после анализа вычислений с удвоенной точностью на машине ОРАКЛ, автор на примере вычислений степенных рядов и непрерывных дробей анализирует взаимосвязь между стремлением получить большую точность за счет увеличения количества взятых членов и нарастающей при этом порожденной ошибкой. Н. П. Трифонов

8279. **Некоторые оценки из теории табулирования. Витушкин А. Г.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 227—228

8280. **Об распространении ошибки при умножении. Перри, Морлок** (On the propagation of error by multiplication. Perry N. C., Morelock J. C.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, N 3, 177—179 (англ.)

Рассматривается вероятностная оценка погрешности результата при умножении. Постановка задачи такова: даны два числа a и b с относительными погрешностями ε и ε', которые лежат в границах от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$. Ищется функция распределения ошибки E в произведении ab в предположении, что все значения ε и ε' равновероятны. Для вероятности того, что ошибка $E=a\varepsilon'+b\varepsilon+\varepsilon\varepsilon'$ превышает фиксированное значение K, даются такие оценки:

$$P(E>K)=\frac{a+b}{2}+\frac{3}{4}+$$

$$+K-(K+ab)\log_e\frac{4(K+ab)}{(2a-1)(2b-1)},$$

$$\frac{-2a-2b+1}{4}\leqslant K\leqslant\frac{2a-2b-1}{4};$$

$$P(E>K)=a+\frac{1}{2}-(K+ab)\log_e\frac{2b+1}{2b-1},$$

$$\frac{2a-2b-1}{4}\leqslant K\leqslant\frac{2b-2a-1}{4};$$

$$P(E>K)=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{4}-$$

$$-K-(K+ab)\log_e\frac{(2a+1)(2b+1)}{4(k+ab)},$$

$$\frac{2b-2a-1}{4}\leqslant K\leqslant\frac{2a+2b+1}{4}.$$

Н. П. Трифонов

8281. **Вычисление одного определителя, имеющего приложение к теории уравнения Матьё.** Сабсович Л. Л., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 1, 145—152

Вычисление полубесконечных определителей сводится к вычислению по рекуррентной формуле определителей более низкого порядка или по рядам, которые автор получает путем разложения исходного определителя. Даны оценки, несколько числовых примеров, показывающих эффективность применяемого приема. Я. И. Алихашкин

8282. **Изложение и доказательство справедливости одного любопытного и тонкого метода перемножения целых чисел, восходящего к древнему Египту.** Альгрен (Exposé et proposition de justification d'une curieuse et subtile méthode, remontant à la plus haute antiquité égyptienne, pour effectuer la multiplication de deux nombres entiers. Algrain Paul), Bull. Assoc. ingrs issus, École applic. artill. et génie, 1956, 34, № 4, 41—43 (франц.)

Окончание статьи, описывающей известный способ перемножения целых чисел, использующий двоичное разложение множителя. А. П. Ершов

8283. **Об умножении комплексных чисел.** Дрейпер (A note on the multiplication of complex numbers. Draper A.), Bull. Electr. Engng Educ., 1956, № 17, 79 (англ.)

Статья методического характера. К. Е. Чернин

8284. **Графический метод быстрого определения объемов днищ резервуаров.** Новотный, Лавингем (Graphical Method quickly solves tank head volumes. Novotny R. J., Lovingham J. J.), Mach. Design, 1955, 27, № 4, 209—211 (англ.)

При вычислении объемов цилиндрических резервуаров круглого и эллиптического сечения надо принимать во внимание и днища, имеющие обычно форму полусфер или полуэллипсоидов. Для вычисления объемов таких днищ, а также сферических и эллипсоидальных сегментов приведены необходимые формулы и дана довольно простая номограмма, позволяющая быстро найти искомые величины без всяких вычислений. А. Б. Штыкан

8285. **Счетная линейка для комплексных чисел.** Зандер (Rechenschieber für komplexe Zahlen. Sander Arnold), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1—2, 128—131 (нем.)

На основе формул связи между выражениями комплексного числа в прямоугольных и полярных координатах

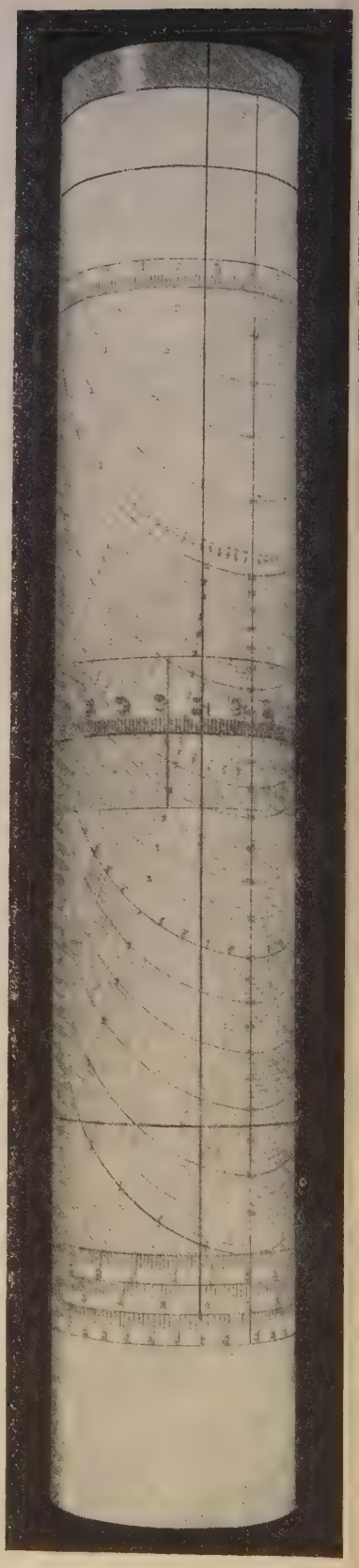
$$\cos\sigma=\frac{x}{r};\quad \sin\sigma=\frac{y}{r}=\cos(\sigma-1^L)$$

(символом 1^L обозначена угловая единица, равная 90°) и $-\lg\cos\sigma=\lg r-\lg x$; $-\lg\sin\sigma=\lg r-\lg y$ в прямоугольной координатной системе $(\sigma,\lg r)$ может быть построено семейство кривых $\sigma\arccos\frac{x}{r}$, зависящих от параметра x, принимающего дискретные значения в пределах от -10 до $+10$, и семейство кривых $\sigma=1^L=\arccos\frac{y}{r}$, зависящих от параметра y. При этом кривая $x=a$ получается из кривой $x=1$ путем передвижения ее в направлении оси абсцисс на $\lg a$, а кривая $y=a$ может быть получена путем сдвига кривой $x=a$ на 1^L в направлении оси ординат σ. Таким образом сетка из указанных двух семейств кривых, каждая из которых помечена соответствующим значением параметра x или y, может быть вычерчена при помощи одного шаблона.

Точка пересечения двух кривых определяет число $z=x+iy$. Ордината σ и отметка r абсциссы $\lg r$ этой точки соответствуют аргументу и модулю того же числа. (В статье комплексное число в тригонометрической форме сокращенно обозначается в виде $z=r\cdot i^{\sigma}$, а произведение двух комплексных чисел $z=z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot i^{\sigma_1+\sigma_2}$).

На этой основе, идея которой принадлежит Рейнгардту (Reinhardt F., Electrotechnische Zeitschr, 1948, № 3, 78) построена описанная счетная линейка. Она служит для умножения и деления комплексных чисел и для преобразования прямоугольных координат в полярные и обратно.

Конструктивно линейка выполнена в виде кругового цилиндра, на который чертеж указанным семейством кривых наклеен так, чтобы горизонтали $\sigma=0$ и $\sigma=2^{\nu}$ совпали. На цилиндр надета прозрачная



гильза, которую можно поворачивать и двигать поступательно. На гильзе нанесены два кольца и продольная прямая. В «начальном» положении последняя совпадает с образующей $\sigma = 0$ ($\sigma = 2^L$), а кольца совпадают с границами $r = 1$, $r = 10$. Поверх гильзы может передвигаться прозрачный поясок с угловыми делениями. Он соответствует визирке обычной логарифмической линейки и служит для установки данного вектора посредством риски, нанесенной в точке $\sigma = 0$ (см. фото). Линейка изготовлена автором, видимо, пока в единственном экземпляре. А. Б. Штыкан

8286. **Приближенная замена тангенсоидальной зависимости линейными. Ульбрихт** (Der angenäherte Ersatz der Tangens-Funktion durch Geraden. Ulbricht Hans), Feinwerktechnik, 1957, 61, № 2, 43—48 (нем.)

Описаны диаграммы для определения погрешностей, возникающих при разных способах замены тангенсоидальной зависимости линейными. В качестве примера рассмотрен измерительный прибор с вращающимся зеркальцем, угол отклонения которого пропорционален измеряемой величине. Расстояние «зайчика» от нуля шкалы пропорционально тангенсу угла отклонений зеркальца, вследствие чего шкала должна быть тангенсоидальной. Замена ее шкалой с равномерными делениями удешевляет прибор, но связана с погрешностями. Предложенные диаграммы позволяют найти такие соотношения, при которых наибольшая погрешность аппроксимации не превышает обычной погрешности отсчета, а также те значения измеряемой величины, при которых погрешность аппроксимации равна нулю.

При этих значениях производится юстировка прибора. А. Б. Штыкан

8287. **Геометрическое решение уравнений третьей, четвертой и пятой степеней. Сиспанов** (Resolucion geometrica de las ecuaciones de tercero, cuarto y quinto grado. Sispanov Sergio), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 265—278 (исп.)

8288. **О графическом решении уравнений** $y' = \frac{m(x) + y \cdot n(x)}{p(x) + y \cdot q(x)}$. **Проснак** (O całkowaniu graficznym równania $y' = \frac{m(x) + y \cdot n(x)}{p(x) + y \cdot q(x)}$. Prosnak Włodzimierz), Zesz. nauk. Politechn. Warsz., 1957, № 27, 77—89 (польск.; рез. русск., англ.)

Отмечается преимущество методов Бэли и Сомервилла (РЖМат, 1955, 2676к) и Гейнриха (Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1951) по сравнению с методом изоклин. Затем даются три способа решения уравнений типа указанных в заголовке. По первому способу уравнение предварительно приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x) + \frac{y}{x} b(x)}{c(x) + y}$$

Применение второго способа требует предварительного приведения его к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{y} u(x) + v(x)}{\frac{x}{y} w(x) + 1}$$

В обоих случаях построение выполняется с применением подвижной координатной системы на прозрачной кальке, как и по методу Бэли и Сомервилла.

По третьему способу, предложенному профессором Бондера и публикуемому с его разрешения, уравнение предварительно приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{g(x) - y}{h(x) - y}$$

и графическое решение осуществляется на основе идей Гейнриха при помощи кривой, уравнение которой в параметрической форме имеет вид $\xi = h(x)$, $\eta = g(x)$. На этой кривой наносится функциональная шкала, деления которой соответствуют равноотстоящим значениям параметра x.

Во всех трех случаях дело сводится к чисто графическому нахождению элементов прямоугольных треугольников, отношение катетов которых определяет значения угловых коэффициентов касательных к интегральным кривым в точках $A_i(x_i, y_i)$.

Подробно изложен способ нахождения усредненных значений производной y' в конечных интервалах Δx независимой переменной x и пояснен ход построения ломаных, аппроксимирующих интегральные кривые.

Рассмотрен пример решения конкретной задачи. А. Б. Штыкан

8289. **Прямое графическое определение среднего значения функции. Пленво** (Détermination graphique directe de la valeur moyenne d'une fonction. Plainevaux J. E.), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 9, 939—949 (франц.)

Излагается простой метод графического построения для данной функции $f(x)$ кривой средних значений, ее касательных и центров кривизны и функции $\int_0^x f(x)\,dx$. При этом требуется лишь проведение параллельных к ортогональным координатным осям. Метод дает высокую точность. С. С. Калиновская

8290. **Номограммы для определения парциальных коэффициентов корреляции. Будников В. И.**, Сб. научно-исслед. работ Ташкентск. текстильн. ин-та, 1956, вып. 3, 121—130

Для определения парциальных коэффициентов корреляции по формуле

$$r_0 = \frac{r_1 - r_2 r_3}{\sqrt{(1 - r_2^2)(1 - r_3^2)}}$$

предлагается номограмма из выравненных точек типа Коши с бинарным полем r_2, r_3. Исследуются преимущества и недостатки различных проективных между собой вариантов номограммы. Г. Е. Джемс-Леви

8291. **Номограмма для лог-нормального частотного анализа. Уэйсс** (A nomogram for log-normal frequency analysis. Weiss L. L.), Trans. Amer. Geophys. Union, 1957, 38, № 1, 33—37 (англ.)

Приведено несколько сетчатых номограмм. Г. Е. Джемс-Леви

8292. **Использование номограмм при графическом решении дифференциальных уравнений. Шмагел** (Použití nomogramu při grafickém řešení diferenciálních rovnic. — Nomografické řešení diferenciální rovnice servomechanismu. Grafické řešeni nelineárních oscilací. Šmahel Josef. Praha, SNTL, 1956, 29 s., il., 3, 49 Kčs.) (чешск.)

8293. **Вычисление астрономической поправки точного нивелирования при помощи номограмм. Нюгор** (Calculation by nomograms of the astronomical correction to precise levelling. Nygaard K.)

Geod. inst. skr., 1954, 20, 1—13+12 figs, pl. (англ.) См. РЖАстр, 1955, 5062.

8294. **Об анаморфозирующем множителе. Залтс К. Я.** Уч. зап. Латв. ун-та, 1956, 8, № 2, 11—20 (рез. лат.)

Рассматривается анаморфоза уравнения

$$F_1K_{23} + g_1L_{23} + H_1M_{23} = 0$$

с помощью A-множителя $v = v(z_2, z_3)$, выводятся условия анаморфозы в форме Келлога—Молдавера и делаются указания о виде в отдельных случаях A-множителя уравнения.

Некоторые формулировки и утверждения работы нуждаются в уточнении. П. В. Николаев

8295. **Проективные преобразования и номограммы. Джемс-Леви Г. Е.,** Уч. зап. Моск. ун-та, вып. 165, Математика, 1954, 7, 208—211

Рассматриваются номограммы второго жанра уравнения $x + y = z$, отличающиеся лишь параметризацией шкал переменных, и геометрические свойства деформации плоскости при проективном соответствии этих номограмм. Указывается на возможность практического использования приведенной в работе сетки деформации при построении номограмм.

П. В. Николаев

8296 К. **Методы численного дифференцирования и интегрирования. (Приложения). Циллер** (Méthodes de différentiation et d'intégration numériques. (Applications). Ziller A., Publs. scient. et techn. Ministère air, 1955, N. T., № 50, 150 p.) (франц.)

Книга представляет собой собрание примеров, определений и замечаний практического характера, относящихся к различным вопросам вычислительной математики. Автор довольно подробно останавливается на вопросах приближенного вычисления несобственных интегралов и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первых двух порядков с помощью степенных рядов. Книга состоит из двух частей. Первая часть содержит 5 глав, вторая 4.

По главам содержание первой части таково:

1. Теорема относительно разложения функции в ряд Тейлора и определения приближенного значения числа θ, входящего в формулу остаточного члена Лагранжа; 2. Численное дифференцирование с помощью безразностных формул и формул с разностями; 3. Интерполирование и обратная интерполяция; 4. Экстраполирование при помощи формул для вычисления конечных разностей; 5. Построение эквидистантной таблицы функции по ее значениям в неравноотстоящих точках.

Вторая часть посвящена численному интегрированию. По главам содержание таково:

В гл. 1, озаглавленной методами численного интегрирования, выводятся квадратурные формулы замкнутого и незамкнутого типов и формулы с абсциссами, лежащими вне промежутка интегрирования. Показывается возможность табулирования неопределенного интеграла с помощью этих формул. Даны формулы с тремя, четырьми и пятью абсциссами с вычисленными числовыми коэффициентами. Гл. 2 посвящается вычислению определенных интегралов. Рассмотрены несобственные интегралы, у которых либо подинтегральная функция, либо один из пределов интегрирования обращается в бесконечность. Исследован случай, когда производная от подинтегральной функции обращается в бесконечность при каком-нибудь пределе интеграла, в то время, как сама функция остается непрерывной при всех значениях аргумента, которые принадлежат промежутку интегрирования. В гл. 3, озаглавленной двойными интегралами, рассматривается задача о вычислении двойных интегралов методом поперечных сечений. Рассмотрен случай, когда подинтегральная функция становится неограниченной в точках границы области интегрирования. Гл. 4 посвящается численному решению дифференциальных уравнений первых двух порядков с помощью степенных рядов. Рассмотрены граничные задачи и задачи о собственных значениях.

Следует отметить, что более полный и общий результат относительно формул численного дифференцирования, квадратурных формул и метода численного решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов содержится в §§ 129 и 143 книги референта (РЖМат. 1955, 1974 К) и в книге «Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений», М., 1951, § 7). Ш. Е. Микеладзе

8297 К. **Численные и графические методы. Ч. 1. Лукашевич, Вармус** (Metody numeryczne i graficzne. Część I. Łukaszewicz Józef, Warmus Mieczysław. Warszawa, PWN, 1956, 429 s., il., 29.20 zł.) (польск.)

Книга представляет собой руководство по численным и графическим методам математического анализа и также содержит оригинальные результаты. Она состоит из 10 глав, содержание которых может быть разбито на три части.

Гл. 1 содержит сведения из теории ошибок и оценок точности вычислений. Авторы вводят удобную и оригинальную теорию максимальных ошибок. В гл. 1а кратко приводятся некоторые общие сведения о статистической теории ошибок.

Гл. 2—8 представляют собой главную часть книги. Дав некоторые начальные сведения о конечных разностях в связи с численными методами (гл. 2), авторы подробно обсуждают (гл. 3) методы интерполяции Лагранжа, Айткена, Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта, иллюстрируя все это удачно выбранными числовыми примерами. В гл. 4 рассматривается аппроксимация; причем равномерная — кратко, а аппроксимация в среднем, метод наименьших квадратов и гармонический анализ — более полно. В гл. 5 исследуется приближенное решение нелинейных уравнений. Рассмотрены методы Штурма, Эйлера, Ньютона, методы хорд, итераций и релаксаций; все эти методы иллюстрируются интересными примерами с полными решениями. В гл. 6 рассматриваются системы линейных уравнений; приведены оценки максимальной ошибки решения. Наряду с классическим методом исключения, рассмотрен метод краковян. В гл. 7 рассматриваются методы численного дифференцирования (в частности, метод интерполяции) и интегрирования, например, метод интегрирования при помощи степенных рядов, методы трапеций, Симсона, Ньютона—Котеса, Чебышева, Гаусса и методы интегрирования несобственных интегралов. Во всех случаях приводятся оценки погрешности и числовые примеры.

В последних трех главах рассмотрены графические методы, в частности, номография.

Книга содержит 9 таблиц, шесть из них дают численные значения некоторых функций, используемых в тексте, и другие три — формулы, необходимые для численного дифференцирования и интегрирования. S. Drobot

8298 К. **Гармонический анализ и операторный метод в приложении к линейным электрическим цепям. Атабеков Г. И.** М., Оборонгиз, 1956, 146 стр., 7 р. 45 к.

ТАБЛИЦЫ

8299. **Пятизначные логарифмические таблицы и другие математические таблицы. Мюллер** (Pětimístné logaritmy a jiné matematické tabulky. Müller Fritz. Překl. z. něm. Praha, SNTL, 1956, 207 s., 18 Kčs.) (чешск.)

8300. Интегралы $C_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2+x^2)^{-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ и $D_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2+x^2)^{-2}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ и их табулирование. Дингл, Арндт, Рой (The integrals $C_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2+x^2)^{-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ and $D_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2+x^2)^{-2}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ and their tabulation. Dingle R. B., Arndt Doreen, Roy S. K.), Appl. Scient. Res., 1956, B6, № 3, 155—164 (англ.)

Интегралы

$$C_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2+x^2)^{-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$$
$$D_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2+x^2)^{-2}e^{-\varepsilon}d\varepsilon \qquad (1)$$

играют фундаментальную роль в теории полупроводников. Основываясь на соотношении

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+x^2}+\frac{x^2}{\varepsilon^2+x^2}=1,$$

авторы легко получают следующие рекуррентные соотношения:

$$p(p-1)C_p+x^2C_{p-2}=1$$
$$p(p-1)D_p+x^2D_{p-2}=C_{p-2} \qquad (2)$$

и несколько более общие соотношения

$$D_p=\frac{1}{2}x^2\{(p+1)C_{p+1}-(p-1)C_p\},\ p>-1$$
$$p(p-1)D_p+x^2D_{p-2}=C_{p-2} \qquad (3)$$

Если x и ε — действительные, то

$$C_p(x)=p^{-1}\operatorname{Re}A_{p-1}(ix)$$
$$D_p(x)=-\frac{1}{2}x^{-1}p^{-1}\operatorname{Im}B(ix) \qquad (4)$$

Соотношения (3) дают возможность получить для интегралов (1) разложения в асимптотические ряды. С помощью (4) интегралы (1) могут быть выражены через функции $Si(x)$ и $Ci(x)$. Именно,

$$C_p=\begin{matrix}x^{-1}\{Si_{p+1}(x)\cos x-Ci_{p+1}(x)\sin(x)\}\\ p^{-1}\{Si_{p-1}(x)\sin x+Ci_p(x)\cos x\}\end{matrix} \qquad (5)$$

Как частный случай (5) будет иметь

$$C_0(x)=-x^{-1}\{si(x)\cos x-Ci(x)\sin x\}$$
$$C_1(x)=-\{si(x)\sin x+Ci(x)\cos x\} \qquad (6)$$

где $si(x)=Si(x)-\pi/2$.

Функция $C_p(x)$ вычислена для $p=-0{,}5\,(0{,}5)\,5{,}0$ и $x=0\,(0{,}2)\,2\,(0{,}5)\,10\,(1)\,20$. Функция $D_p(x)$ вычислена для $p=0{,}0\ (0{,}5)\,6{,}5$ и тех же значений x. Для $p\equiv 0\pmod 1$ интегралы (1) вычислялись по формулам (6) с последующим применением формул (2) и (3). Для $p\equiv\frac{1}{2}\pmod 1$ вычисления велись по формулам (5) с последующим применением формул (2) и (3). Таблицы вычислены с четырьмя значащими цифрами. В качестве приложения приводится таблица интегралов Френеля $Si(x)$ и $Ci(x)$ с двенадцатью десятичными знаками.

Л. А. Сорокина

8301. Интегралы $A_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon+x)^{-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ и $B_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon+x)^{-2}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ и их табулирование. Дингл, Арндт, Рой (The integrals $A_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon+x)^{-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ and $B_p(x)=(p!)^{-1}\int_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon+x)^{-2}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$ and their tabulation. Dingle R. B., Arndt Doreen, Roy S. K.), Appl. Scient. Res., 1956, B6, № 3, 144—154 (англ.)

Выведены рекуррентные соотношения

$$pA_p+xA_{p-1}=1,\quad pB_p+xB_{p-1}=A_{p-1}.$$

Показано, что для $p>-1$ функции $A_p(x)$ и $B_p(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xA_p''+(1-p-x)A_p'-A_p=0,$$

так что A_p и B_p есть вырожденные гипергеометрические функции. Указаны формулы, связывающие функцию $A_p(x)$ с интегральной показательной функцией $Ei(x)$ интегралом вероятностей $F(x)$, функцией Уиттекера $W_{k,m}(x)$ и вырожденной гипергеометрической функцией $M(\alpha,\gamma,k)$.

Используя преобразования Меллина, авторы получили выражения для $A_p(x)$ в виде степенных рядов, отдельно для целых и дробных значений p. Выражения для $B_p(x)$ можно получить дифференцированием по x выражений для $A_p(x)$. Интегралы $A_p(x)$ и $B_p(x)$ вычислены в таблице при

$$x=0\,(.1)\,1\,(.2)\,2\,(.5)\,10\,(1)\,20 \text{ и } p=-0.5\,(.5)\,4$$

с четырьмя значащими цифрами. Указано, что для мнимых значений аргумента значения могут быть получены по формулам

$$A_p(ix)=(p+1)C_{p+1}(x)-ixC_p(x)$$
$$B_p(ix)=C_p(x)-2x^2D_p(x)-2ixpD_{p+1}(x).$$

Л. А. Сорокина

8302. Таблицы классических орбитальных интегралов в теории кулоновского возбуждения. Альдер, Винтер (Tables of the classical orbital integrals in Coulomb excitation. Alder Kurt, Winther Aage. Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab., 1956, **31**, № 1, 74 pp.) (англ.)

Книга содержит таблицы интеграла

$$I_{\mu\lambda}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi[\varepsilon\operatorname{sh}w+w]}\frac{[\operatorname{ch}w+\varepsilon+i\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot\operatorname{sh}w]^\mu}{[\varepsilon\operatorname{ch}w+1]^{\lambda+\mu}}\,dw$$

и функций $f_\lambda(\xi)$ и $df_\lambda(\vartheta,\xi)/d\Omega$, выражающихся через $I_{\mu\lambda}$.

Интегралы вычислены для следующих значений параметров: $\vartheta=10°\,(10°)\,180°$, $\varepsilon=0{,}0\,(0{,}1)\,1{,}0\,(0{,}2)\,2{,}0$; $4{,}0$ для $\lambda=1{,}2$, $\xi=0{,}2\,(0{,}2)\,1{,}0\,(0{,}5)\,2{,}0$; $4{,}0$ для $\lambda=3{,}4$. Все таблицы даны с шестью значащими цифрами.

Л. А. Сорокина

8303 К. Семизначные таблицы тригонометрических функций, содержащие натуральные значения шести тригонометрических функций через каждые 10″

от 0 до 360° и значения котангенсов и косекансов через 1″ от 0 до 10°. Изд. 2-е. Хренов Л. С. М., Гостехиздат, 1956, 411 стр., 24 р. 20 к.

В книге представлены следующие таблицы. I. Натуральные значения $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x$ с 7—9 значащими цифрами для $x = 0(1'')10°$. Начиная с 1° даются первые разности. II. Значения $w'' \operatorname{ctg} w$ и $w'' \operatorname{cosec} w$ с 7 значащими цифрами для $w = 0(10'')1°20'00''$. Таблицы служат для интерполяции функций ctg, cosec и tg, sec соответственно для углов, близких к 0 и 90°. III. Натуральные значения шести тригонометрических функций с 4—11 десятичными знаками для аргумента $x = 0(10'')45°$. На основании известных соотношений таблицы приспособлены для нахождения значений функций при углах, больших 45°. Первые разности не даны лишь для ctg, cosec и tg, sec соответственно при угле от 0 до 10° и от 80° до 90°. IV. Таблицы для перевода десятичных долей градуса в градусную меру, градусной меры угла в часовую и обратно, градовой меры угла в градусную и градусной меры в радианную. V. Таблица перевода десятичных долей суток в часы, минуты и секунды. VI. Таблица постоянных величин, связанных с числами π, e, с радианной мерой угла и др. Правила пользования таблицами иллюстрированы большим количеством примеров.

К. А. Карпов

8304 К. Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра. Белоусов С. Л. М., АН СССР, 1956, 379 стр., илл., 23 р. 70 к.

Протабулированы функции

$$\overline{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}(\sin\theta)^m \frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m},$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра n-го порядка, которые в литературе известны как присоединенные сферические функции. Нормирующий множитель выбран так, что $\int_{-1}^{+1}\left[\overline{P}_n^m(x)\right]^2 dx = 1$. Таблицы характеризуются следующими данными: точность — 6 десятичных знаков, $0 \leqslant m \leqslant 36$, $m \leqslant n \leqslant 56$, $\theta = 0(2{,}5°)90°$. Большинство табличного материала является новым.

Вычисления проводились на электронной вычислительной машине М-2 Академии Наук СССР по представлениям $\overline{P}_n^m(\cos\theta)$ в виде рядов по тригонометрическим функциям кратных дуг и по рекуррентным соотношениям между функциями $\overline{P}_n^m(\cos\theta)$ различных индексов n и m. Контроль вычислений также осуществлялся по рекуррентным соотношениям. Подробно описана программа вычислений. Большое внимание автор уделил исследованию устойчивости рекуррентных формул. Имеется библиография.

Отсутствие указаний об интерполяции следует считать недостатком таблиц.

К. А. Карпов

8305 К. Таблицы цилиндрических функций от двух переменных. Деканосидзе Е. Н. М., АН СССР, 1956, 493 стр., илл., 50 руб.

Цилиндрические функции от двух переменных (функции Ломмеля)

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z),$$

$$V_\nu(w, z) = U_{-\nu+2}(w, z) + \cos\left(\frac{w}{z} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (1)$$

протабулированы с шестью десятичными знаками при $\nu = 1$ и 2 для следующих значений переменных: 1) $w = 0{,}5\,(0{,}02)\,1{,}2\,(0{,}05)\,4\,(0{,}1)\,6{,}2$; $w \leqslant z\,(0{,}01) \leqslant 4\sqrt{w}$; 2) $w = 6{,}2\,(0{,}1)\,10{,}0$; $w \leqslant z\,(0{,}01)\,10{,}0$. Это первые сколь-нибудь полные таблицы этих функций. Вычисления велись по формулам разложения функций Ломмеля в ряды по тем же функциям; контроль осуществлялся по формуле (1). Даны рекомендации по интерполяции, расширению таблиц по индексу ν и аргументам w и z, приведены графики функций $U_1(w, z)$ и $V_1(w, z)$. Имеются ошибки в формулах (4), в выражении для A_m, в примере 1.

К. А. Карпов

8306 К. Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций. Канторович Л. В., Крылов В. И., Чернин К. Е. М., Гостехиздат, 1956, 462 стр., илл., 18 р. 85 к.

Таблицы приспособлены для решения задачи Неймана в прямоугольнике, задачи Дирихле и для нахождения на контуре нормальной производной от решения задачи Дирихле в следующих областях: 1) прямоугольник $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$; 2) полуплоскость $(y \geqslant 0)$; 3) полоса $(-\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$; 4) полуполоса $(0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$; 5) прямой угол $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$; 6) круг $(0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; 7) полукруг $(0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Таблицы позволяют находить гармоническую функцию и не только в указанных областях, но и в областях, которые могут быть разбиты на них или получены их наложением. При помощи таблиц можно решать третью граничную задачу $\left(\Delta u = 0,\ l\frac{\partial u}{\partial n} + mu = f\right)$ путем сведения ее к первым двум. Таблицы вспомогательных коэффициентов составлены в предположении, что граничная функция f известна в некоторой совокупности точек S контура. f — кусочно-гладкая, может иметь в отдельных точках разрывы первого рода. Решение ищется в узлах заданной внутри области сетки в виде линейной комбинации значений искомой функции (или ее нормальной производной в случае задачи Неймана) f_i в точках S границы области с табулируемыми коэффициентами. Для сокращения объема таблиц учтена симметрия в задачах. Так, в случае круговой области $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ основные узлы расположены на луче $\varphi =$ (при $r = {}^1/_8\,({}^1/_8)\,{}^7/_8$, функцию f достаточно знать в точках контура $0\,(\pi/_{24})\,\pi$. Для прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ b/a \leqslant 1$ (в случае задачи Неймана полагалось $a = 1$) узлы расположены в левой нижней четверти прямоугольника. Рассмотрено 11 видов прямоугольника: при $b/a = {}^{10}/_{16}\,({}^{2}/_{16})\,{}^{16}/_{16}$ взята квадратная сетка с шагом $h = a/_8$, при $b/a = {}^{2}/_{16}\,({}^{1}/_{16})\,{}^{8}/_{16}$ — сетка с шагом $a/_8$ по y и $a/_{16}$ по x. Вблизи сторон прямоугольника шаг уменьшен вдвое. f_i задаются на всех сторонах прямоугольника с тем же шагом. В полосе $-\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant y < 1$ основные узлы сетки лежат на оси $0y$ при $y = {}^1/_8\,({}^1/_8)\,{}^4/_8$; f_i задаются на каждой из граничных прямых в точках $0\,({}^1/_8)\,1\,({}^2/_8)\,4, 5$. При $x > 4{,}5$ коэффициенты при f_i равны нулю с точностью до шести знаков после запятой. Для бесконечных областей соответствующими коэффициентами учитывается лишь конечный участок контура. С помощью асимптотических выражений вычислены коэффициенты, позволяющие учесть предельные значения f на $-\infty$ и на $+\infty$.

Приведена дополнительная таблица, позволяющая преобразовать f в случае, если она известна в сетке S', вдвое более густой, чем S. Даны таблицы значений элементарных гармонических функций и их производных, служащих для «сглаживания» граничной функции и ее первой производной. «Сглаживание» выполняется путем вычитания из искомой функции $u(x, y)$ функции $v(x, y)$, граничные значения которой имеют те же особенности, что и f.

Для вычисления искомой функции $u(x, y)$ в точках, не являющихся узлами сетки, предлагается квадратичное и кубичное интерполирование. Решение граничных

задач в прямоугольнике с нетабличным отношением сторон требует линейного или квадратичного интерполирования. Коэффициенты для решения обеих граничных задач даны с шестью знаками после запятой, для вычисления нормальной производной — с пятью. Таблицы сосчитаны по известным формулам, выражающим решение через функцию Грина для уравнения Лапласа; выражение для последней найдено из формул конформного преобразования. Интегралы берутся численным методом. В отличие от ранее предложенных пособий для численного решения эллиптических уравнений, где решение ищется методом сеток, в настоящей книге использован метод, дающий приближенное «аналитическое» выражение для искомой функции.

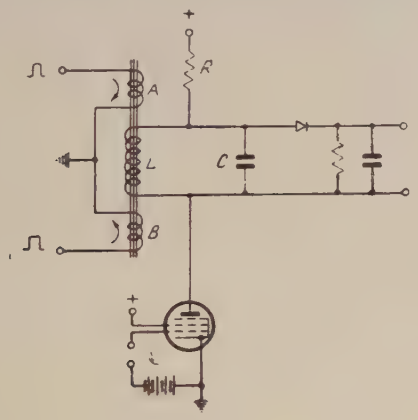
В. Ф. Баклановская

См. также: 7985, 7992, 8022, 8023, 8025

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

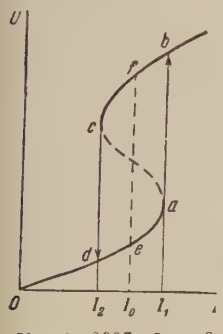
8307. **Феррорезонансные триггеры. Гарсия-Сантесмасес** (Parallel ferroresonant triggers. Garcia Santesmases J.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 186—194 (англ.)

Описывается схема триггера, основанная на явлении параллельного феррорезонанса (см. фиг. 1). Здесь L и C — нелинейная индуктивность и линейная емкость, составляющие феррорезонансный контур, A и B — цепи управления. Феррорезонансный контур



К реф. 8307. Фиг. 1.

включен в цепь пентода, благодаря чему поддерживается постоянство тока, питающего триггер. Характеристика триггера показана на фиг. 2.



К реф. 8307. Фиг. 2.

При величине постоянной составляющей тока пентода, равной I_0, напряжение на выходе триггера может иметь два устойчивых значения, соответствующие точкам e и f на характеристике рис. 2. Переход от одного напряжения к другому происходит скачком, при подаче сигналов в управляющие цепи A либо B. Характеристику триггера можно сдвигать влево или вправо, меняя постоянную составляющую тока пентода. Приводится схема триггера со счетным входом. В этом случае для управления триггером требуется двуполярный импульс, подаваемый в одну из обмоток запуска. Такой же импульс может быть получен и на выходе триггера.

Экспериментальные исследования схем проводились при частотах рабочего тока 70 *кгц*, 1 *мгц*, 1,5 *мгц*. Максимальная частота работы триггера при этом равнялась соответственно 12, 65 и 150 *кгц*.

Б. Н. Малиновский

8308. **Быстродействующая вычислительная машина TPE. Картер** (The TRE high-speed digital computer. Carter R. H. A.), Automat. Digital Comput. London, 1954, 56—64 (англ.)

Описывается конструкция и работа параллельной цифровой вычислительной машины TPE. Машина работает с одноадресными командами, в двоичной системе с фиксированной запятой, имеет быстродействующее запоминающее устройство на электростатических трубках емкостью 512 24-разрядных чисел и внешнее запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 1,5 миллиона двоичных цифр.

Система представления двоичных цифр в машине необычна и заключается в том, что как 1, так и 0 представляются наличием импульсов, но на разных шинах. Отсутствие импульсов на той или иной шине указывает на повреждение, что облегчает контроль исправности работы машины.

Машина выполняет 14 основных команд. Кроме того, имеются дополнительные команды для перевода входных данных из двоично-десятичной формы в двоичную при вводе в машину и двоичных чисел в нужную форму для печати. Операция умножения также выполняется по специальной подпрограмме. Машина работает на частоте 50 *кгц*.

Б. И. Стрелков

8309. **МОЗАИК. Кумс** (MOSAIC. Coombs A. W. M.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 38—42 (англ.)

Приводится описание электронной быстродействующей машины МОЗАИК (The Ministry of Supply Automatic Computer) последовательного действия с четырехадресной системой команд. Запоминающее устройство выполнено на ртутных трубках, рассчитанных на хранение 1040 40-разрядных двоичных чисел.

Частота основных импульсов машины 570 *кгц*. Время сложения двух 40-разрядных чисел 70 *мксек*, время умножения 6 *мсек*. Для ввода данных в машину используются либо перфокарты, либо перфолента шириной 100 *мм*. Результаты вычислений пробиваются на перфокартах.

Машина содержит 6000 ламп и 2000 германиевых диодов. Потребляемая мощность 30 *квт*. Для ртутных трубок требуется 750 *кг* ртути. Основные элементы машины — триггеры, клапаны, дешифраторы, инверторы — выполнены на электронных лампах.

Отмечены трудности, которые пришлось преодолеть при наладке машины (стабилизация частоты импульсов в ртутных трубках, вопросы передачи импульсов по цепям машины).

Б. Н. Малиновский

8310. **Дешевая электронная вычислительная машина APE(X)C. Бут** (The APE(X)C — a low cost electronic calculator. Booth A. D.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 264—270 (англ.)

Дается краткий исторический очерк разработки некоторых цифровых вычислительных машин в Англии, явившихся прототипом описываемых в статье машин APE(R)C и APE(X)C. Машина APE(R)C, построенная в 1952 г., включает в себя 450 вакуумных ламп и имеет запоминающее устройство на магнитном барабане. Германиевые диоды в машине не применяются. Машина работает на частоте 30 *кгц*. В основу работы арифметического узла и запоминающего устройства положен последовательный способ передачи данных. Устройство управления работает последовательно-параллельно. Количество разрядов равно 32, причем один из них является разрядом знака. Среднее время обращения к магнитному барабану составляет 8 *мксек*. Емкость барабана 512 32-разрядных чисел. Ввод и вывод осуществляются с помощью телетайпов.

Машина APE(X)C является модификацией машины APE(R)C. Она имеет запоминающее устройство на электроннолучевых трубках, и количество ламп в ней на 180 меньше, чем в предыдущей машине.

Машина работает на частоте 60 *кгц*. Емкость запоминающего устройства составляет 1024 32-разрядных двоичных числа. Сложение и вычитание выполняется за 500 *мксек*. Б. И. Стрелков

8311. **Вычислительная машина. Уилкинсон** (The pilot ACE. Wilkinson J. H.), Automat. Digital Comput. London, 1954, 5—14 (англ.)

Приводится описание машины ACE, введенной в действие в 1950 г. в Национальной физической лаборатории (Англия). В 1951 г. машина подвергалась небольшой переделке, после чего была передана из электронной секции лаборатории в математический отдел. Полезное время работы машины составляет около 65%. Машина последовательного действия, трехадресная, частота главных импульсов 1 *мгц*. В качестве запоминающего устройства используются 11 ртутных линий задержки, каждая на 32 32-разрядных двоичных числа. Максимальное время выборки числа из трубки — 1024 *мксек*. Кроме того, имеются 5 ртутных линий задержки на 32 разряда и две линии на 64 разряда. Приведены примеры составления программы вычислений и структурная схема арифметического и запоминающего устройств машины. Б. Н. Малиновский

8312. **Вычислительная машина «Харуэл». Кук-Ярборо** (The Harwell computer. Cooke-Yarborough E. H.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 259—264 (англ.)

Описываются основные характеристики автоматической цифровой вычислительной машины, работающей с малой скоростью. Машина построена в Харуэлском исследовательском институте атомной энергии. Указывается, что выбор медленнодействующей машины объясняется необходимостью больших затрат времени на ввод и вывод большого количества информации. Малая скорость работы машины позволила использовать реле в качестве основного элемента логических цепей, декатроны — в качестве оперативного запоминающего устройства и в качестве внешнего запоминающего устройства — бумажную ленту, используемую для ввода команд и хранения входных и выходных данных. Система команд двухадресная. Скорость работы машины сравнима со скоростью настольных клавишных машин. Предусмотрен автоматический контроль хода вычислений с остановкой после трех последовательных ошибок. Указывается, что главным положительным качеством этой машины является автоматический характер ее работы, оправдывающий недостаток, заключающийся в малой скорости ее работы. Отмечаются желательные изменения в конструкции и логике машины, необходимые для повышения скорости ее работы. Б. И. Стрелков

8313. **Требования к конструкции дешевой вычислительной машины. Токер** (The design requirements of a lowcost computing machine. Tocher K. D.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 281—283 (англ.)

Автор отмечает, что при постройке дешевой машины должны быть принесены в жертву некоторые требования к параметрам больших электронных машин. Для снижения стоимости машины предпочтительнее ограничивать те характеристики, которые снижают стоимость ее эксплуатации, чем те, которые снижают начальные затраты на строительство машины. Следовательно, надо придавать особое значение надежности машин, простоте эксплуатации и программирования. Высокая надежность работы оборудования позволяет сократить обслуживающий персонал. Надежность оборудования, как правило, возрастает с уменьшением скорости его работы. Отсюда следует, что выгоднее проектировать машины с невысокой рабочей частотой, но с параллельным принципом работы. Стоимость параллельной машины не на много выше стоимости последовательной. Объем оперативного запоминание должен быть как можно меньше. Необходимо использовать запоминающие устройства на магнитном барабане или ленте. Для команд можно использовать нестираемое, дешевое запоминающее устройство на перфоленте. Трехадресный код, по мнению автора, невыгоден из-за большого количества операций по передаче чисел в машине.

В качестве входных и выходных устройств для дешевых машин по своей скорости и надежности работы подходящими являются перфораторы и репродукторы. М. С. Саплин

8314. **Дополнительно о принципах работы цифровых вычислительных машин. Версуа** (Compléments sur le fonctionnement d'une machine à calculer arithmétique. Versois Pierre), Nature, 1956, № 3260, 490—493 (франц.)

Приводятся дополнительные данные и разъяснения по некоторым разделам статьи того же автора (РЖМат, 1957, 5251). Частично освещены вопросы диодной логики цифровых вычислительных машин и схемы диодных вентилей (схема логического сложения, логического умножения). Затрагиваются также такие вопросы, как контроль вычислений, погрешности счёта и ввод информации в машину с внешних запоминающих устройств. А. А. Крупский

8315. **Математические машины в Швеции. Экелёф** (Les machines mathématiques en Suède. Ekelöf Stig), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 135—154, Discuss. 208—210, 347—354 (франц.)

Сообщается, что вопросами создания и использования вычислительных машин в Швеции ведает Дирекция математических машин. Под ее наблюдением была построена и эксплуатируется релейная вычислительная машина БАРК (BARC) (РЖМат, 1954, 3864). Указывается также, что в Швеции построены и работают несколько моделирующих устройств, механических и электронных. Т. А. Шмаонова

8316. **Конференция по вычислительным машинам Восточного объединения. «Новые разработки в области вычислительных машин». Нью-Йорк, 10—12 декабря 1956 г. Программа, перечень и краткое содержание докладов** (Eastern Joint computer conference, New York, Dec. 10—12, 1956. «New developments in computers». Program, titles, and abstracts.), Computers and Automat., 1956, **5**, № 12, 20—23, 26, 31 (англ.)

Публикуется программа и краткое содержание докладов конференции по вычислительным машинам, организованной совместно Обществом радиоинженеров (IRE) Американским обществом инженеров-электриков (AIEE) и Ассоциацией вычислительных машин.

Программа конференции разбита на пять разделов. Первый раздел «Новые системы» содержит шесть докладов, посвященных новым машинам: Transac S-1000, NCR-304, Datamatic 1000, Tradic Leprechaun, а также машинам Массачусетского технологического института с запоминающим устройством емкостью в 69 536 ячеек и фирмы ИБМ с рабочей частотой 10 *мгц* (машина «Стретч»).

Во втором разделе «Цепи и элементы» содержатся доклады о полупроводниковых элементах фирм Филко и ИМБ, сверхпроводниковых элементах Массачусетского технологического института (криотронах), элементах Национального бюро стандартов на насыщающихся трансформаторах, работающих на частотах в сотни *кгц*, и магнитных элементах фирмы «Ремингтон Рэнд» с рабочей частотой 2,5 *мгц*.

В разделах «Входные и выходные устройства», «Быстродействующие запоминающие устройства» и «Запоминающие устройства со случайным выбором данных» содержится 14 докладов, в том числе о новых разработках фирмы ИБМ в технике магнитных запоминающих устройств с большим быстродействием, о запоминающем магнитном элементе, разработанном фирмой «Берроуз» (Burroughs) в качестве заменителя ферритовых сердечников и отличающемся высокой температурой, стабильностью и дешевизной, о компактном запоминающем устройстве фирмы «Ремингтон Рэнд» с выбором совпадения токов, обладающем временем обращения 1 *мксек*. Н. П. Брусенцов

8317. **Электронные вычислительные машины в страховом деле. Шпринг, Лепин** (Elektronische Rechenmaschinen in Versicherungsbetrieben. Erster Bericht der Kommission zum Studium elektronischer Maschinen in Versicherungsbetrieben. Spring Osc. W., Leepin Peter), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1956, 56, № 2, 149—258 (нем.)

Рассматриваются возможности, предпосылки и эффект применения быстродействующих электронных машин в страховом деле.

8318. **Вычислительные машины как лабораторный инструмент (вычисление на электронных цифровых машинах оптических постоянных тонкой металлической пленки). Лоб, Денман** (The digital computer as a Laboratory tool (Electronic digital computation of optical constants of thin metal films). Loeb Arthur L., Denman Harry H.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 1, 1—16 (англ.)

Сообщается о применении электронной вычислительной машины Массачусетского технологического института Whirlwind I к решению задач, связанных с тонкими металлическими пленками. Свойства тонких металлических пленок, осажденных на толстом неабсорбирующем основании, исследуются посредством измерения отражения и передачи излучения, направленного перпендикулярно к основанию и пленке. Выводятся уравнения для нахождения индекса рефракции и коэффициента абсорбции пленки.

Подробно описывается решение этих уравнений методом последовательных приближений, поскольку индекс рефракции и коэффициент абсорбции не выражаются в явном виде через коэффициенты отражения и передачи.

Оказалось, что метод последовательных приближений сходился во всех практически рассмотренных случаях как для инфракрасного, так и для видимого излучения.

Далее дается краткое описание машины Whirlwind I, на которой производилось решение этих уравнений. Приводится довольно подробное описание программы вместе с ее блок-схемой, а также примеры полученных результатов и их анализ. Н. П. Трифонов

8319. **Проверка зонной теории работы мозга на универсальной цифровой машине. Рочестер, Холланд, Хейбт, Дуда** (Tests on a cell assembly theory of the action of the brain using a large digital computer. Rochester N., Holland J. H., Haibt L. H., Duda W. L.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 3, 80—93 (англ.)

Описание цикла работ, проведенных в исследовательской лаборатории фирмы ИБМ с целью экспериментальной проверки существующих нейрофизиологических теорий работы нейронных сетей. Основные теоретические положения взяты авторами из работы Хебба (Hebb, The organization of behavior, N. Y., 1949) с учетом поправок Милнера (Milner).

Первая модель на 69 нейронов была опробована на машине ИБМ-701. 2048 ячеек запоминающего устройства машины были разбиты на 70 зон (69 нейронов + программа). В нейронах записывали только те сведения, которые можно теоретически обосновать и для живого организма: «номер» нейрона, момент его возбуждения, величину проводимости синапсов (в модели до 10 на каждый нейрон) и т. д.

Машина периодически считывала информацию о 69 нейронах, производила необходимые расчеты и вносила соответствующие изменения в информацию о нейронах с тем, чтобы представить состояние цепи в следующий момент времени.

На этой модели было получено явление диффузной реверберации (diffuse reverberation). В модели учтен постулат Хебба, заключающийся в том, что если от некоторого нейрона передается возбуждение возбужденному нейрону, то соответствующий синапс становится максимально проводящим и впоследствии сохраняет это свойство.

Основное положение теории Хебба заключается в том, что возбуждение в нейронной сети носит зонный характер. Нейроны внутри зоны соединены возбуждающими синапсами, эти же нейроны с нейронами, не входящими в зону, соединены преимущественно запрещающими синапсами. Один нейрон может входить в несколько зон и с течением времени менять свою принадлежность к той или иной зоне. В силу описанного распределения синапсов данная зона может долго оставаться возбужденной, подавляя в то же время другие. В дальнейшем большую роль начинает играть «усталость»: порог возбуждения часто возбуждаемого нейрона становится выше, чем редко возбуждаемого. Скорость спада запрещающего сигнала больше, чем возбуждающего, и когда нейроны зоны устанут настолько, что уровень запрещения для окружающих зон станет ниже уровня возбуждения, создаются благоприятные условия для возбуждения других зон. Происходит переключение зон.

Над моделированием описанного процесса авторы работают в настоящее время. Эксперимент, в котором зоны соединяются между собой только запрещающими синапсами, т. е. не могут возбуждать одна другую, уже осуществлен на модели с 512 нейронами (использовалась машина ИБМ-704).

Одна из задач, которую ставили перед собою авторы, работая с этой моделью, заключалась в том, чтобы проверить, достаточно ли условие наличия запрещающих синапсов для образования зон или же последние заново возникать не могут. Опыт подтвердил возможность возникновения зон. Библ. 9 назв. Г. Г. Стецюра

8320. **Вычислительное и инженерное образование. Стэнли** (Computers and engineering education. Stanley Paul E.), Computers and Automat., 1956, 5, № 2, 10—12 (англ.)

Обсуждается вопрос о необходимости введения в учебные планы институтов, готовящих инженеров, курсов по электронным машинам дискретного и непрерывного

действия. Особенно подчеркивается целесообразность постановки курса по моделирующим устройствам. Знакомство с методами решения задач на моделирующих устройствах дает возможность студентам как следует понять существо динамической аналогии явлений, происходящих в различных физических системах.

Далее излагаются основные конструктивные данные устройства, применявшегося автором для учебных целей. На ней студентами изучались прямолинейное движение твердого тела, полет самолета, процессы в электромеханических следящих системах.

Г. М. Петров

8321. **Оптимальная точность вычислений на цифровых машинах с плавающей запятой. Самельсон, Бауэр** (Optimale Rechengenauigkeit bei Rechenanlagen mit gleitendem Komma. Samelson Klaus, Bauer Friedrich L.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, 4, № 45, 312—316 (нем.)

Обсуждается вопрос о точности автоматических цифровых вычислительных машин с плавающей запятой. Делается вывод, что в машины можно включить дополнительные специальные устройства, которые будут гарантировать наивысшую точность, достижимую при данном количестве разрядов. Для машин, работающих по двоичной системе, для повышения точности необходима некоторая модификация известных подпрограмм перевода чисел из одной системы счисления в другую. Методы перевода довольно подробно освещаются в статье. Н. П. Трифонов

8322. **Определение линии уровня функции двух переменных на быстродействующих электронных счетных машинах. Королюк В. С., Ющенко Е. Л.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I. М., АН СССР, 1956, 192

Сообщается о применении схемы блуждания для определения линии уровня функции от двух переменных, осуществленной в виде компактных программ для электронной машины. Л. Е. Королев

8323. **Расширение области применения релаксационного метода вычислений. Найт, Аллен** (Extension of field of application of relaxation methods of computation. Knight B. E., Allen D. N. de G.), Nature, 1956, 178, № 4530, 433—434 (англ.)

Работа состоит из двух частей. В первой части, написанной Найтом, указывается систематический процесс для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных релаксационным методом на электронных счетных машинах. Вторая часть, написанная Алленом, является критикой на первую часть. Основное возражение, выдвигаемое здесь, состоит в том, что релаксационный метод для решения нелинейных уравнений требует человеческого вмешательства в процессе вычислений, поскольку в случае неудачного выбора первого приближения процесс может не сходиться. Г. П. Багриновская

8324. **Интегрирующие приставки к пересчетным устройствам. Кузнецов В. А., Чмутов К. В.**, Завод. лаборатория, 1955, 21, № 12, 1508—1509

В статье дается описание двух принципиальных схем, осуществляющих интегрирование (усреднение) серии прямоугольных импульсов, имеющих постоянную по времени длительность и величину. Для записи результатов к схемам усреднения могут подключаться типовые самопишущие гальванометры. Устройства предназначены для работы совместно с пересчетными схемами приборов, осуществляющих измерение радиоактивности различных препаратов. Г. М. Петров

8325. **Основные черты современных цифровых дифференциальных анализаторов. Браун** (Design features of current digital differential analyzers. Braun Edward Z.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 4, 87—97

8326. **Использование матричных методов при электрическом моделировании. Хоннелл, Хорн** (Matrices in electronic differential analyzers. Honnell Pierre M., Horn Robert E.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 217—221 (англ.; рез. франц.)

Отмечается, что как решение систем линейных дифференциальных уравнений, так и анализ электронных схем можно производить, используя матричный метод при этом теряют значение ряд специальных терминов электрического моделирования.

Приведена математическая постановка задачи для схемы соединений одного элемента общей системы электрического моделирования, состоящей из усилителей с большим коэффициентом усиления, ко входу которого через различные сопротивления подключены выходные напряжения других усилителей. Показано что при пренебрежении паразитными элементами математическое описание процессов в схеме может быть записано в матричной форме.

В качестве примера представлена система двух уравнений второго порядка, которая преобразована в матричную форму, и схема соединений элементов для решения приведенной системы уравнений.

Указывается, что для увеличения точности моделирования следует увеличивать коэффициенты усиления усилителей схемы, а для увеличения стабильности системы — ввести преобразование корней. И. М. Витенберг

8327. **Использование метода аналогий для исследования нелинейных систем с несколькими степенями свободы. Лудеке** (Analogies and simulators for solving nonlinear systems with several degrees of freedom. Ludeke Carl A.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 273—276 (англ.; рез. франц.)

Указывается, что широко применяемые электромоделирующие устройства являются слишком громоздкими и дорогими для решения простых систем уравнений и предлагаются механические модели, в основ которых положено горизонтальное коромысло, которое может вращаться около точки, смещенной на одну треть от правого края коромысла. С левой стороны коромысла размещается пружинная система и вязкий амортизатор так что в системе имеются инерционные и восстанавливающие силы, демпфирующая сила и возмущающая синусоидальная сила. Вертикальное размещение пружины с левой стороны обеспечивает линейную зависимость силы от положения коромысла, а горизонтальное — нелинейную зависимость. При моделировании систем с несколькими переменными связь между отдельными коромыслами может быть либо жесткой, либо осуществляться с помощью пружины. Отмечается, что в ряде случаев пружина, создающая восстанавливающую силу, может быть заменена соленоидом, в котором сердечник связан с коромыслом а сила тока является функцией положения коромысла. Использование электромехнических элементов облегчает выполнение связей между отдельными системами, что иллюстрируется примером построения электромеханического аналога для решения системы двух уравнений второго порядка с нелинейными членами.

И. М. Витенберг

8328. **Визуальное представление диаграммы излучения направленной антенны из диполей с помощью вычислительного устройства непрерывного действия Сарага** (Visual representation of radiation patterns of arrays of dipoles by analogue computation Saraga W.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 527—531 (англ. рез. франц.)

При построении диаграммы направленности сложной антенны из n диполей необходимо найти сумму сину

соидальных напряжений частоты F с различными амплитудными значениями и различными фазовыми углами, являющимися функциями номера диполя. При этом фазовый угол является суммой двух углов: угла, не зависящего от времени, и угла, имеющего синусоидальный закон изменения с частотой f «просмотра» диаграммы направленности.

Вычислительное устройство содержит два генератора синусоидального напряжения (частоты F/g и частоты f). Выходное напряжение генератора частоты F/g синхронизирует работу генератора пилообразного напряжения. Постоянные фазовые сдвиги для каждого из диполей антенны имитируются пилой с соответствующим изменением фазы. Выходное напряжение генератора частоты f поступает на ячейки сдвига фаз, а затем на фазовые модуляторы для получения полного фазового сдвига отдельно для каждого из диполей. На модулятор подается также пилообразное напряжение.

Выходные напряжения с фазовых модуляторов для каждого из диполей изменяются по амплитуде в соответствии с амплитудными значениями синусоидальных напряжений диполей, а затем суммируются, после чего поступают на вертикально-отклоняющие пластины электроннолучевой трубки.

Показаны результаты определения диаграммы направленности антенны из трех диполей; погрешность не превышает 5% от максимальной ординаты кривой напряженности поля. И. М. Витенберг

8329. Универсальный электронный нелинейный блок. Томович (A versatile electronic function generator. Tomovich Rajko), J. Franklin Inst., 1954, 257, № 2, 109—120 (англ.)

Рассматривается нелинейный блок для быстродействующих электронных машин непрерывного действия, осуществляющий в общем случае зависимость вида $y = \varphi(t) f[\psi(t)]$, когда функция $f[\psi(t)]$ набирается по n узловым точкам. В частности, с его помощью могут генерироваться функции независимой переменной (временно), воспроизводиться функции от одной переменной, перемножаться две переменные.

Схема блока выполнена на стандартных электронных ячейках, содержащих нуль-орган, клапан и потенциомегр. Ячейка отличается хорошими динамическими и статическими характеристиками. Так, для варианта ячейки, примененной в моделирующем устройстве, работающей с повторением решения, время включения ячеек составляло 5 *мксек*, а погрешность по входу $\psi(t)$ для узловых точек была 0,1 *в*.

Дается анализ погрешностей схемы, обусловленных наличием дискретности изменения передаточного коэффициента по каналу $\varphi(t)$, запаздыванием в срабатывании ключей и неточностью в работе нуль-органа.

В заключение методика использования блока иллюстрируется на примере генерирования функций времени со ступенчатой и кусочно-линейной аппроксимацией. Г. М. Петров

8330. Исследование дифференциальных уравнений специального класса с помощью электрического моделирующего устройства (сетки из сопротивлений). Браувер (Network-analogue solution of a special class of simultaneous differential equations. Brouwer G.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 380—382 (англ.; рез. франц.)

Указывается, что уравнения вида:

$$\Delta m = A\frac{\partial m}{\partial t} + Bm + C,$$

$$\Delta V = D\frac{\partial m}{\partial t} + Em + F,$$

где $A/B = D/E$ и где Δm или ΔV есть оператор Лапласа

$$\Delta m = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2},$$

а A, B, C, D, E и F — коэффициенты, которые зависят только от координат, могут быть решены с помощью электрических моделирующих устройств — сеток, предназначенных для решения уравнений Лапласа. Показана схема элемента моделирующего устройства, состоящего из последовательных сопротивлений, между которыми включены параллельные цепи, состоящие из сопротивлений и конденсаторов.

Описано и проиллюстрировано кинематической схемой объекта и электрической схемой моделирующего устройства применение последнего для решения задач деформации. Представлены также системы уравнений и краткие описания способов решения задач физики полупроводников и ферромагнитных сплавов. И. М. Витенберг

8331. Электронные дифференциальные анализаторы. Изложение основных принципов работы моделирующих устройств. Ремон (Les analyseurs différentiels électroniques. Exposé sur les principes fondamentaux du calcul analogique. Raymond François Henri), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 19—32 (франц.; рез. англ.)

Рассматривается представление величин в дифференциальных анализаторах: непрерывных и цифровых. Описываются основные принципы работы тех и других. Приводятся рассуждения о перспективах развития вычислительной техники. И. К. Волков

8332. Моделирующее устройство «Контрав» ИА-55. Галло (Le calculateur analogique Contraves IA 55. Gallo M.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 264—268 (франц.; рез. англ.)

Описывается моделирующее устройство фирмы «Контрав» (Contraves) в Цюрихе для решения дифференциальных уравнений. В машине функции представляются напряжениями переменного тока частотой 400 *гц*. Сложение осуществляется операционными усилителями, интегрирование — с помощью индукционного мотора. Таким образом, на вход интегратора подается электрическая величина, а на выходе получается механическая. Обратное преобразование поворота вала в электрическое напряжение производится с помощью дифференциальных конденсаторов. Эти же конденсаторы в качестве основного элемента входят в множительное устройство и в блок генерирования функций. Точность деталей устройства 0,1%, время вычисления для большинства уравнений, решаемых устройством, менее 30 сек. В качестве выходного устройства применен самописец. Г. Ф. Типалин

8333. Моделирующее устройство фирмы «Фиат». Перотто (Le calculateur analogique FIAT. Perotto P. G.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 76—81 (франц.; рез. англ.)

Описывается моделирующее устройство, используемое фирмой «Фиат» для исследования системы подвески и устойчивости автомобиля. Устройство включает в себя систему решающих усилителей, подобную устройству Массачусетского технологического института и способную решать систему из четырех дифференциальных уравнений второго порядка. Кроме этого, в устройство входят перемножитель и фотоэлектрический функциональный генератор на электроннолучевых трубках. И. К. Волков

8334. Моделирующая установка «Джинн» лабораторий Дерво. Жирер (Le calculateur analogique «Djinn» des laboratoires Derveaux. Girerd Jean L. M.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 55—57 (франц.; рез. англ.)

Машина имеет 30 усилителей с усилением 150 000 (без нагрузки 500 000) и частотой среза (усилений 1) 250 *кгц*. Установка нуля автоматическая перед каждым периодом расчета, дрейф после восстановления $\leqslant 0{,}2$ *мв*. Операционные потенциометры устанавливаются с помощью моста. Имеется 14 электромеханических генераторов функций и множительные устройства. Возможно блокировать результаты в любой момент времени. Машина выпускается серийно, по стоимости доступна для лабораторий. Простота конструкции и надежность машины позволяет использовать для ее эксплуатации персонал, не знакомый с электроникой.

Г. Ф. Типалин

8335. Дифференциальный анализатор института «Б. Кидрич». Митрович (Analyseur différentiel de l'institut «Boris Kidrich». Mitrovic Dusan), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 67—69. Discuss., 69 (франц.; рез. англ.)

Описано моделирующее устройство для решения обычных линейных или нелинейных дифференциальных уравнений, которое может быть использовано и для решения краевых задач. Устройство периодического типа. В качестве выходного устройства используется осциллографическая трубка и устройство для непосредственного измерения координат точек интегральной кривой. Функциональный генератор устройства выполняет все нелинейные математические операции.

И. К. Волков

8336. Электронное моделирующее устройство ИЕ-КСИС. Сантесмасес (Analyseur differentiel electronique I. E.-C. S. I. C. Santesmases J. Garcia), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 82—87. Discuss., 87 (франц.; рез. англ.)

Описывается электронное моделирующее устройство, построенное в Мадридском университете. Устройство имеет 16 решающих усилителей. Усилитель построен на двух двойных триодах; дает усиление 25000 при дрейфе нуля на входе 10 *мв/час*. Сопротивления входа — переменные, устанавливаются с помощью моста. Генератор функций — диодный. Формирующие диоды питаются от катодных повторителей, к сеткам которых подключены фиксирующие диоды. Это устраняет взаимозависимость наклонов последовательных отрезков кривой. В множительно-делительном устройстве используется интегрирующий каскад, на вход которого подается делимое или множимое. На пентодную сетку подается импульс с длительностью, зависящей от другого напряжения. Точность работы устройства не менее 2%.

Г. Ф. Типалин

8337. Характеристики и эволюция линейных и нелинейных точных моделей фирмы СЕА. Андре (Caractéristiques et évolution du matériel standard S. E. A. de précision linéaire et non linéarie, pour le calcul analogique. André Gérard), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 33—37 (франц.; рез. англ.)

Даются характеристики моделирующих устройств, выпускаемых фирмой SEA. В частности, описываются устройства OME-11, OME-20, OME P2. Рассматриваются характеристики усилителей, сервомеханизмов и диодных нелинейных блоков, применяемых в этих моделирующих устройствах. Объясняются причины изменения характеристики элементов моделирующих устройств при модернизации и выпуске новых устройств.

И. К. Волков

8338. Непрерывное множительно-делительное устройство. Изабо (An analog multiplier-divider. Isabeau Jean), Actes. Journées. internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 104—106 (англ.; рез. франц.)

Излагается теория построения множительно-делительного устройства, осуществляющего зависимость $P = AB/U$, где A, B и U — произвольные функции времени.

Для получения требуемого соотношения устройство содержит генераторы функции $Uf(t)$ и $Bf_1(t)$, где $f(t)$ и $f_1(t)$ — некоторые вспомогательные периодические функции. В момент равенства $Uf(t) = A$ при $t = t'$ выходной каскад запоминает значения величины $Bf_1(t')$, равные соответствующему мгновенному значению произведения $P = AB/U$, если выполнено условие $f(t) = f_1(t)$.

В связи с тем, что процесс сравнения и запоминания периодически повторяется, выходная величина устройства аппроксимирует истинную кривую во времени кусочно-линейным образом. При этом значение динамической погрешности получается тем меньше, чем выше рабочая частота повторений.

Экспериментальный образец множительно-делительного устройства, осуществленный на таком принципе, работал с погрешностью в статическом режиме 2%.

Длительность одного периода составляла 66 *мсек*. Основные элементы схемы — ключи и генераторы функций — построены соответственно на базе диодного моста и колебательного $R < C$ контура. К этим элементам схемы предъявляются наиболее жесткие требования по точности изготовления и стабильности во времени.

Существенным достоинством схемы является то обстоятельство, что как сомножители A и B, так и делитель U могут быть величинами не только положительными, но и отрицательными.

Г. М. Петров

8339. Краткий обзор документов, представленных делегацией СССР на Брюссельскую конференцию по машинам непрерывного действия. Айнбиндер (Analyse des documents déposés par la délégation de l'U. R. S. S. Ajnbinder M.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 532—534 (франц., англ.)

В статье дается краткий анализ технических характеристик математических машин непрерывного действия ИПТ-4, ИПТ-5, МПТ-9, ЭЛИ-12, ЭЛИ-14, ЭИ-12, представленных делегацией СССР на Брюссельскую конференцию 1955 г. Наряду с положительной оценкой машин всех 6 типов, особенно подчеркиваются высокие технические характеристики электромодели типа МПТ-9.

Г. М. Петров

8340. Вычислительные машины непрерывного действия и их применение в теплопередаче и аэродинамике потока. Часть I. Нолан (Analog computers and their application to heat transfer anf fluid flow — Part I. Nolan John E.), Computers and Automat. 1954, **3**, № 9, 20—23 (англ.)

Дан исторический обзор развития вычислительной техники, кратко рассмотрен вопрос о применении вычислительных машин в физике и технике. В заключение рассматривается методика работы на электронных вычислительных машинах непрерывного действия.

К. К. Василевский

8341. Электромоделирующая установка, предназначенная для использования в физической лаборатории. Хелмик, Хелмик (An electronic analog computer for the general physics laboratory. Helmick H. H., Helmick P. S.), Proc. Iowa Acad. Sci., 1955, 62, 393—398 (англ.)

Использование электромоделирующей установки для обучения студентов в физической лаборатории имеет большое практическое значение. С этой целью разработана электромоделирующая установка, содержащая 12 операционных усилителей упрощенного типа и прецизионные делители напряжения. Для питания схемы использовались типовые источники с напряжением +250 и —300 *в*. В статье кратко излагаются особенности конструкции и схемы установки. С помощью установки исследовались явления движения твердого тела, вязкого трения, теплового запаздывания, движения баллистического гальванометра, радиоактивного распада. Г. М. Петров

8342. **Некоторые вопросы точности линейных моделирующих устройств. Фукс** (Some considerations of the accuracy of linear analogue computers. Fuchs H.), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 214—216 (англ.; рез. франц.)

Рассматривается вопрос об оценке решения системы линейных дифференциальных уравнений с помощью моделирующего устройства. Путем исследования системы алгебраических уравнений, полученных из исходной системы с помощью преобразования Лапласа, выводится выражение для ошибки в корнях уравнений, обусловленной неточностью установки коэффициентов уравнений, связью между выходами решающих усилителей, связью между входным и выходным каскадами решающих усилителей. Предлагаемая методика оценки погрешностей решения на линейной моделирующей установке использовалась для случая уравнения второго порядка. В качестве решающего усилителя использовался усилитель с внутренним коэффициентом усиления порядка 100 000, а частота решения была примерно 1 радиан в секунду. Было показано, что вследствие очень малого выходного сопротивления усилителей с обратной связью влияние связи между выходами усилителей на точность вычислений не существенно, тогда как связь выходных каскадов с первыми анодами усилителей через источники питания имеет существенное значение для точности решения на моделирующей установке. Для получения решения с погрешностью не более 0,1% сопротивление источников питания должно быть менее 2 *ом*.

Б. Ш. Беркович

8343. **Простая конструкция анализатора алгебраических полиномов. Лукашевич** (Construction simplifiée d'un analyseur de polynômes algébriques. Lukaszewicz Léon), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 64—66 (франц.; рез. англ.)

Описывается анализатор алгебраических полиномов, построенный в Математическом институте Польской академии наук. В анализаторе комплексные числа представляются синусоидальным напряжением с частотой 500 *гц*. С помощью цепи усилителей образуются степени комплексного числа вплоть до 12-й. Результаты комбинируются в соответствии с коэффициентами полинома, ответ сравнивается с помощью нуль-индикатора с произвольным комплексным числом. Вычисления посредством автоматической переключающей системы приводятся к одному квадранту, что уменьшает число необходимых усилителей. Усилители для уменьшения шумов содержат избирательные цепи. Точность основных деталей ~0,002. Погрешность анализатора ≤0,01. Габариты ≈ 60×40×30 *см*. Г. Ф. Типалин

8344. **Гидравлическое моделирование процессов в противоточных и смешанных теплообменниках. Бекстрём, Юхас, Льебо, Хупер** (Hydraulic analogy for counterflow and reverse flow heat exchangers. Backstrom Matts, Juhasz Stephen, Liebaut André, Hooper Frank), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 487—499 (англ.; рез. франц).

Представлен ряд методов гидравлического моделирования процессов в теплообменниках различных типов — с параллельным движением теплого и холодного потоков, со встречным движением и со смешанным движением. При этом теплообменник заменяется двумя вертикальными трубками с жидкостью, соединенными снизу капиллярной трубкой. Аналогом поверхности теплообменника является время, аналогом температуры — уровни жидкости в трубках. И. К. Волков

8345. **Устройства для отыскания корней характеристических уравнений. Михайлов Н. Н.**, Тр. 2-го Всес. совещания по теории автоматич. регулирования. М.—Л., 1955, 3, 117—129, выступления 140—143

Обзор общих положений построения схем корнеискателей. Представлена блок-схема корнеискателя. Даны схемы корнеискателей Харта и Лофгрена.

И. К. Волков

8346. **Повышение точности механического интегрирования и решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью импульсивного кулисно-реечного интегратора. Вольман Б. Л.**, Тр. Уфим. авиац. ин-та, 1956, вып. 2, 93—110

8347. **Введение в принципы моделирования. Джефри** (An introduction to the principles of analogue computing. Jeffery A. D.), Process Control and Automat., 1956, **3**, № 9, 306—314 (англ.)

Сообщаются известные сведения о методах суммирования, интегрирования, функционального преобразования, умножения и деления, применяемых в технике моделирования. Н. Н. Михайлов

8348. **Гомеостат. Ашби** ((L'homéostat. Ashby W. Ross), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 475—492. Discuss., 493—494 (франц.)

Изложены принципиальные основания и описана модель электромеханической машины, имитирующей одну из основных функций мозга — поддержание организма в равновесии с окружающей средой. Машина может накапливать «опыт» и использовать его при последующих экспериментах. По существу гомеостат представляет собой машину для решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В описанной конструкции были взяты четыре уравнения вида:

$$dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$

. . . . . .

$$dx_4/dt = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

Машина имеет до 300 000 комбинаций параметров, что позволяет менять внешние условия в широких пределах. Основная особенность гомеостата состоит в том, что если предложенная ему задача вообще разрешима, то он пытается найти это решение, перегруппировывая внутренние связи и функции образующих его элементов. Аналогичное поведение имеет место и при выходе из строя одного из элементов.

К статье приложен подробный отчет о состоявшейся после доклада дискуссии, в процессе которой было высказано значительное число критических замечаний.

Т. А. Шмаонов

8349. **Синтетическая речь. Мейер-Эплер** (Synthetische Sprache. Meyer-Eppler W.), Z. Vereines dtsch. Ingr, 1954, 96, № 1, 13—17 (нем.)

Сообщается, что достижения современной техники и успехи, сделанные теорией информации, позволяют заменять естественную человеческую речь синтетиче-

кой речью. Указывается, что наиболее простым является полусинтетическое воспроизведение речи, осуществляемое «электроакустической гортанью», применяемой в тех случаях, когда почему-либо нарушены функции естественной гортани (например, после операции). Эти функции — создание богатого гармониками соответствующего звукового тона — может выполнять искусственная гортань. Звуковые колебания, попадая через подводящий резиновый шланг и стеклянный мундштук в полость рта, под воздействием соответствующих движений артикуляционных органов так изменяются в своем спектральном составе, что возникают звуки хорошо понимаемой речи.

Указывается, что большое внимание уделяется сейчас развитию аналитико-синтетической телефонии, позволяющей примерно в 10 раз сократить ширину полосы частот каналов связи, не ухудшая разборчивости телефонных разговоров.

Разбираются принципы построения приемно-передающей аппаратуры (вокодеров, см. РЖМат, 1955, 4121), применяемой в аналитико-синтетической телефонии. В качестве передающих устройств здесь служат: а) гармонический анализатор речи, определяющий ее спектральный состав, б) измеритель частоты и регистратор громкости, определяющие высоту звуковых колебаний и уровень их громкости, в) кодирующее устройство, посылающее по 11 параллельным каналам с общей полосой пропускания около 300 *гц* закодированную соответствующим образом информацию об основных характеристиках передаваемой речи. В состав приемной аппаратуры входят: а) декодирующее устройство, расшифровывающее приходящие инструкции и вырабатывающее соответствующие сигналы управления, б) «генератор речи», подобный применяемому в «электроакустической гортани» и состоящий, соответственно разделению звуков речи на звонкие и глухие, из 2 генераторов: звукового генератора и генератора шумов, в) артикуляционная аппаратура, состоящая из набора фильтров и модуляторов и выполняющая функции артикуляционных органов человека.

Рассматриваются возможности дальнейшего уменьшения полосы пропускания каналов связи. Отмечается, в частности, что в случае, если вид использования подлежащих передаче сообщений допускает стандартизацию звуков, слов или целых фраз, то становится целесообразным применять на приемной стороне запоминающие устройства и там запасать стандартизированные сообщения, выбирая их из памяти в соответствии с приходящими инструкциями.

Отмечается, что достоинством аналитико-синтетической телефонии является также и хорошая приспособленность ее к передаче секретных сообщений.

Указывается на возможности клавишного и графического (фотоввод текста) управления аппаратурой, синтезирующей человеческую речь. Таким образом возможно получать «говорящую» книгу и осуществлять любое замедление воспроизводимой речи, не изменяя характера произнесенных звуков (например, при обучении иностранному языку). Библ. 15 названий.

Г. М. Грязнов

8350. **На конференции в Намюре ученые определяют понятие кибернетики. Мерпийа** (A Namur les savants définissent la cybernétique. Merpillat R.), Service (France), 1956, déc., 850—853 (франц.)

В общедоступной форме сообщается о проходившем с 26 по 29 июня 1956 г. Международном конгрессе по кибернетике в Намюре. В работе конгресса принимали участие около 700 ученых, в том числе представители СССР, США, Польши, Югославии, Румынии. Заседания проходили по 4 секциям: 1) принципы и методы кибернетики; 2) логические машины; 3) автоматизация; 4) кибернетика и живая природа. В общей сложности было заслушано до 100 докладов.

Приведены фотографии отдельных узлов французской цифровой вычислительной машины «Гамма», демонстрировавшейся на конгрессе. А. А. Крупский

8351. **Сравнение вычислительной машины с мозгом. Мак-Каллок, Летвин, Питс, Дел** (Une comparasion entre les machines à calculer et le cerveau. McCulloch M. S., Lettvin J. Y. Pitts W. H., Dell P. C.). Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 425—443 (франц.)

В первой части доклада анализируются общие, функциональные свойства мозга и вычислительной машины. Устанавливается группа принципиально различных свойств, таких, например, как способность мозга к интуитивному мышлению, позволяющая создавать математические теоремы и научные гипотезы. Показано также и наличие общих свойств, главным образом в процессах обработки поступающей информации.

Во второй части доклада обобщен значительный экспериментальный материал по основным свойствам нейронов, роль которых в мозгу авторы считают эквивалентной роли элементарных ячеек вычислительной машины. Т. А. Шмаонов

8352. **Машины для зашифровки секретных донесений. Лоррен** (The cipher no spy can crack. Lorraine Philip L.), Industria (Stockholm), 1955/1956, 51, № 11, 62—63 (англ.)

Сообщается, что шведский инженер Борис С. В. Хагелин разработал несколько конструкций шифровальных машин. Во время Второй мировой войны применялось два типа таких машин. Тип С — портативная машина, размером с сигарную коробку, весом в 2 *кг*, работает со скоростью 50 знаков в 1 мин. Тип ВС — размером с портативную пишущую машинку, весит 11 *кг* и работает со скоростью 140 знаков в 1 минуту от электропривода и со скоростью 60 знаков в 1 мин вручную. Обе машины производят как зашифровку, так и расшифровку информации. Е. Н. Маквецов

8353. **Преобразование цифровых данных в напряжение с помощью специального релейного преобразователя. Пьель** (Conversion arithmétique analogique au moyen d'un convertisseur spécial à relais. Piel Gérard), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 512—516. Discuss., 517 (франц.; рез. англ.)

В статье рассматривается вопрос преобразования двоичного кода в напряжение. Двоичный код запоминается релейным регистром, который подключает к суммирующему усилителю набор калиброванных сопротивлений. В момент переключения реле регистра имеют место паразитные выбросы напряжения на выходе. При использовании обычного двоичного кода выбросы напряжения приводят к большим ошибкам преобразования. Предложена схема, преобразующая в напряжение рефлексный двоичный код. В этом случае ошибка существенно уменьшается. Описываемый преобразователь может использоваться как умножитель. Один сомножитель в этом случае представляется в виде цифрового кода, второй — в виде напряжения. Точность умножения — 11 двоичных знаков (включая знак). Максимальная частота переключений — 200 раз в секунду. М. М. Симкин

8354. **Анализ функционального преобразователя, использующего электроннолучевую трубку. Эльгескуг** (Photoformer analysis. Elgeskog Erik), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles. 1956, 95—97. Discuss., 97 (англ.; рез. франц.)

Анализируется точность функционального преобразователя, использующего электроннолучевую трубку, ширму и фотоумножитель.

Приведена зависимость относительной силы света светового пятна электроннолучевой трубки (отношение силы света, прошедшего через ширму, ко всей силе света пятна) от величины проекции расстояния от центра пятна до края ширмы на перпендикуляр к границе ширмы. Зависимость построена для двух вариантов распределения силы света по площади пятна: для распределения по закону Гаусса и для простого цилиндрического распределения,— а также для граничных случаев, когда радиус пятна соизмерим с радиусом кривой. На основании приведенных зависимостей сделан вывод о возможности представления относительной силы света пятна в виде линейной функции проекции расстояния от края ширмы до центра пятна. Полученная функциональная зависимость позволяет сделать вывод, что относительная статическая ошибка схемы функционального преобразователя зависит лишь от крутизны функциональной зависимости, изображаемой ширмой, и от коэффициента усиления тракта луч—отклоняющие пластины.

Динамическая погрешность схемы преобразователя зависит от времени после освечения экрана трубки и от постоянной времени усилителя, в схему которого вводятся специальные корректирующие цепи для обеспечения устойчивости системы, охваченной глубокой отрицательной обратной связью. На выходе преобразователя имеется напряжение шумов, которое определяется работой фотоумножителя схемы. Для уменьшения этого напряжения, изменения которого носят высокочастотный характер, до уровня в 10 *мв* можно увеличить время переходного процесса в системе от 5—10 до 20—30 *мсек*.

Представлены краткие требования к оптической системе преобразователя, которая должна быть расположена между трубкой и фотоумножителем возможно более близко к ширме и должна обеспечивать малые потери света и отсутствие параллакса. Отмечается, что для уменьшения общей погрешности ниже 1% необходимо применять ширмы, компенсирующие ошибки электроннолучевой трубки. Одним из таких видов ширм являются самонастраивающиеся ширмы, с помощью которых изменяется общий характер зависимости во время работы.

В заключение указывается, что приведенные автором характеристики преобразователя были получены при использовании электроннолучевой трубки 5AQP11 и фотоумножителя 6291 фирмы «Дю Монт» (Du Mont).

И. М. Витенберг

8355. **О скорости вычисления и энергозатратах идеальных счетных машин. Любченко Г. Г.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 442—454

Рассматривается задача уменьшения времени выполнения арифметических операций и уменьшения энергетических затрат механизма для цифровых вычислительных устройств.

Вводятся в рассмотрение два коэффициента $\theta = T_i/T_j$ и $E = E_i/E_j$, где T_i — время, необходимое для сложения двух чисел некоторой совокупности, а E_i — средняя затрата энергии на такого рода сложение для машины типа i. Соответственно T_j и E_j относятся к машине типа j. Таким образом, коэффициенты θ и E служат для сравнительной оценки двух вычислительных устройств. Вводится понятие идеальных вычислительных механизмов, у которых время одного элементарного сложения, так же как и энергия, необходимая для этого, постоянны для всех типов машин и не зависят от принципа работы арифметического устройства. Элементарное сложение определяется как сложение двух цифр в системе счисления, в которой работает машина.

Для идеальных машин коэффициенты θ и E зависят от максимального количества элементарных сложений, необходимых для выполнения арифметической операции над двумя числами.

Путем подсчета среднего количества элементарных сложений, необходимых для сложения и умножения в машинах с арифметикой разных типов, автор приходит к следующим выводам. Десятичный сумматор даст возможность ускорить вычисления в 3,33 раза сравнительно с двоичным соответствующей разрядности, причем энергия затрачивается в 3,11 раза меньше.

Матричное умножение в десятичной системе происходит в 6,63 раза быстрее, чем в двоичной системе, при этом энергии затрачивается в 2,18 раза меньше. Этот способ умножения в 4,10 раза быстрее, чем десятичное умножение последовательным сложением. С увеличением основания системы счисления значения θ и E увеличиваются. Знание коэффициента θ позволяет оценить, в какой степени усложнение конструкции является рентабельным.

Приведенные выкладки и расчеты θ и E дают возможность определения верхних пределов усложнения механизмов любого типа. Это, в свою очередь, позволяет вычислить критерии рациональности проектируемых машин в зависимости от требований, предъявляемых к их конструкции.

Л. И. Королев

8356. **Умножение и деление на табуляторе Т-5. Усыскин Ф. Л., Финогеева Н. Г.** В сб.: Механизация учета и вычислительных работ. М., Машгиз, 1955, 22—40

В статье описываются способы, дающие возможность производить умножение и деление на табуляторе типа Т-5 без использования специальных вычислительных машин. Общая основа всех способов — последовательное сложение или вычитание с помощью схемы «двойных ходов». Эффективность табулятора при этом снижается, но возможность выполнения всех действий на одной машине является существенным достоинством. Приведены примеры коммутации, иллюстрирующие описанные способы.

А. Ф. Сергеенко

8357. **Суммирующие и счетные машины** (Adding and calculating machines.), Mach. Market, 1956, № 2881, 21—22, 25 (англ.)

Кратко описывается структура участка сборки механических счетных машин. Показывается последовательность сборки машин на поточной линии и применение дублеров для предотвращения возможных задержек потока, а также дается представление о методике проверки готовых изделий. Статья сопровождается фотографиями некоторых деталей и рабочих мест.

А. Ф. Сергеенко

См. также: 8108

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аветисян А. Е. 7995
Агеев Д. В. 7999
Андрунакиевич В. А. 7691
Антонов Н. П. 7570 К
Аржаных И. С. 7917
Астахов В. Д. 8160 К
Атабеков Г. И. 8298 К

Б

Бакельман И. Я. 8242
Бардычева М. Ф. 7603
Бари Н. К. 7803
Белоусов С. Л. 8304 К
Белоцерковский О. М. 7935 Д
Бердзе А. 8163
Березман А. М. 8186
Биллевич К. К. 7675
Блинов И. С. 8160 К
Блох Э. Л. 7606, 7924
Бокштейн М. Ф. 7747
Болотин А. И. 8269
Бородинский М. Я. 7638
Бочкарев Д. 7629 К
Брызгалов Н. И. 8160 К
Будак Б. М. 8249
Будников В. И. 8290

В

Ван Вэнь-сянь 8007
Витушкин А. Г. 8279
Вольман Б. Л. 8346
Выгодский М. Я. 7570 К

Г

Гасымов Ч. 7932
Гермаидзе В. Е. 7867
Гермогенова Т. А. 7937 Д
Гиль Г. В. 7859
Гладкий А. В. 7801
Годунов С. К. 7884, 8250
Гольберг П. А. 7662
Гонтковская В. Т. 8263
Гроссман Д. П. 8255
Губерман І. О. 8268

Д

Дайовий В. 7830
Данилюк И. И. 7846
Дезин А. А. 7882
Деканосидзе Е. Н. 8305 К
Демидович Б. П. 7869
Джемс-Леви Г. Е. 8295
Джрбашян М. М. 7814
Динник А. Н. 8000 К
Дмитриева Г. А. 8181
Добровольский В. А. 7580
Добрушин Р. Л. 8052
Добрышман Е. М. 7904
Дроздецкий В. В. 7574 К
Дынкин Е. Б. 8046
Дюбюк А. Ф. 7904

Е

Ефимов Н. В. 8152 К

З

Залтс К. Я. 8294
Золин А. Ф. 7899
Зубова А. Ф. 7858

И

Ипоземцев О. И. 7839
Иосида 8042 К.

К

Каазик Ю. Я. 8022, 8023
Какигава 7623
Калужнин Л. А. 7657
Канторович Л. В. 8306 К
Карпелевич Ф. И. 8202
Кертес А. 7635
Киро С. Н. 7885
Китахара 8261
Клини С. 7591 К
Княжева Н. И. 8094 К
Кожеуров П. Я. 7569 К
Колмогоров А. Н. 8051
Кореиблюм Б. И. 7964
Королюк В. С. 8322
Корытин А. А. 8160 К
Кошелев А. И. 7895
Краснов М. Л. 7912 Д
Красносельский М. А. 8009
Красовский Н. Н. 7878
Кручкович Г. И. 8205
Крылов В. И. 8306 К
Кубилюс И. 7604
Кудрявцев Л. Д. 7825
Кузнецов В. А. 8324
Кузьмин П. А. 7874
Куниёси 7751
Курцвейль Я. 7871, 7872

Л

Лаврентьев М. М. 7911 Д
Ландис Е. М. 7888
Лебедев А. А. 7868
Лесин А. Д. 7870
Лихачева О. Я. 7564
Лопатинский Я. Б. 7938
Лупанов О. Б. 7725
Любченко Г. Г. 8355
Лю Лун-фу 7809
Лянце В.Э. 8016

М

Макаренко Г. И. 7914 Д
Маркова В. А. 8019
Маркус С. 7792
Матузявичус А. 7764
Мацусима 8215
Меленцов А. А. 7664
Мелляховецкий А. С. 7939
Минь Сы-хао 7598
Мираков В. Е. 8025
Михайлов Н. Н. 8345
Мокрищев К. К. 8182
Морозова Е. А. 8137
Муратов Л. М. 7956, 7957
Мышкис А. Д. 7859

П

Нагами К. 7737
Намики 7974
Никитин В. В. 7570 К

О

Онищик А. Л. 7762
Ососков Г. А. 8044

П

Петросян Г. Б. 7581
Поваров Г. Н. 7720
Погорелов А. В. 8238
Погребысский И. Б. 7577
Подсыпанин В. Д. 7614
Полак А. И. 7743
Посвянский А. Д. 8158 К
Потоцкий М. В. 8153
Пугачев В. С. 8043

Р

Райк А. Е. 7576
Раскин Н. М. 7578
Рашковий Д. 8135
Рехлицкий З. И. 7875
Решетняк Ю. Г. 8214
Рутицкий Я. Б. 8009

С

Сабсович Л. Л. 8281
Сакович Г. П. 8045
Санкин А. И. 7570 К
Се Бан-цзе 7687
Селезнев А. И. 7815
Синельников Е. М. 7820, 7847
Сканави М. И. 7879 Д
Скачков Б. Н. 7873
Скоробогатько В. Я. 7893
Скородумов В. М. 8155
Скороход А. В. 8050
Слезингер И. Н. 7887
Слугин С. Н. 8253
Смирнов В. И. 7567 К
Смирнов Ю. М. 7733, 7738, 7740, 7745
Соболев В. И. 8010
Соколов Ю. Д. 8252
Спенсер Д. К. 7848 К
Сретенский Л. Н. 7921
Статулявичус В. А. 8054
Сюй Ли-чжи 7810

Т

Такахаси 7751
Таннака 7751
Тарасов Н. П. 7972 К
Тода 7753
Тозони О. В. 7820, 7822
Толстов Г. П. 7971 К
Томиё М. 7805
Трахтенброт Б. А. 7726
Тэрата 7751

У

У Вэнь-цзюнь 7769, 7771, 7772. 7773
Усыскин Ф. Л. 8356
У Чжо-цюнь 7794

Ф

Феденко А. С. 8200
Фет А. И. 8031
Филиппов А. Ф. 7929
Фильчаков П. Ф. 7821
Финогеева Н. Г. 8356
Фішман К. М. 8166
Флеров Г. М. 8161 К

Х

Харазов Д. Ф. 8020
Харамонов С. А. 7886
Хатипов А. Э. 8156
Хачатрян И. О. 7840
Хренов Л. С. 8303 К

Ц

Цзян Цзэ-цзянь 7808
Цхакаиа Д. Г. 7579

Ч

Чеботарев Г. Н. 7827
Черпин К. Е. 8306 К
Чжан Гун-апь 7732
Чжан Су-чэн 2864, 7765
Чжан Чжи-фэн 7877 Д
Чжао Фан-сюн 8264, 8267,
Чжоу Юй-линь 7913 Д
Чибрикова Л. И. 7828
Чмутов К. В. 8324
Чушкин П. И. 7936 Д
Чэнь Чин-и 7910 Д

Ш

Шестаков В. И. 7727
Шилов Г. Е. 8035
Шиффер М. 7848 К
Шнокало И. З. 7577

Э

Энгелис Г. К. 7963
Энгельсон Я. Л. 8002

Ю

Юшенко Е. Л. 8322

Я

Яглом И. М. 8148 К
Яковлев А. И. 7984

A

Abramowitz M. 7958
Achieser N. I. 8041 К
Adams J. F. 7758
Adil Y. 7697
Agrawal H. L. 7925
Aguiar da Silva Leme R. 8105
Ajnbinder M. 8339
Åkerberg B. 8122
Albert A. A. 7640, 7703
Albrycht J. 7942
Alder K. 8302
Aleksandrov P. S. 7779 К
Algrain P. 8282
Aljančić S. 7795
Allen D. N. de G. 8323
Amitsur S. A. 7699
André G. 8337
Anscombe F. J. 8065
Arndt D. 8300, 8301
Arnese G. 7783
Aronszajn N. 7890
Ashby W. R. 8348
Aubert P. 8149 К
Avdis J. 8142
Aymerich G. 8138
Azorin Poch F. 8082

B

Backes F. 8187
Bäckström M. 8344
Bakelman I. I. 8188
Balada F. 7586
Balliccioni A. 7996
Banaschewski B. 7736
Banerjee K. S. 8124
Barker C. C. H. 8180
Barlotti A. 8232
Barton D. E. 8078
Bass J. 7566 К
Bastenaire F. 8116
Basu Mazumdar N. C. 7802
Bauer F. L. 8266, 8274, 8321
Bauer H. 7714, 8026
Behrens E.—A. 7708
Bellman R. 7791, 8099, 8100
Benedetti C. 7945, 7946
Bennett B. M. 8084
Benz W. 8239 Д
Berg L. 7953
Bertholon F. 8112
Besicovitch A. S. 7796
Beth E. W. 7592 К
Betti E. 7923
Bhatnagar P. L. 7994
Bianchi L. 8133 К
Bieberbach L. 7824
Birindelli C. 7851
Blackburn N. 7647
Blanchard A. 8198
Blondel J.—M. 7881
Bodewig E. 7646 К
Boltjanski W. G. 7973 К
Bonera P. 8173
Bonsall F. F. 8030
Booth A. D. 7641, 8310
Booth K. N. V. 7641
Bott R. 7767
Bouligand G, 7969 К
Bourbaki N. 7776 К, 7777 К
Bourne S. 7696
Brachman M. K. 7987
Braun E. L. 8325
Brauner H. 8183
Bredon G. E. 8240
Brelot M. 7898
Brouwer G. 8330
Bruijn N. G. de 7639
Buchdahl H. A. 8221
Bureau F. J. 7902
Burgers J. M. 7919

C

Cafiero F. 7781
Cambi E. 7991
Carlitz L. 7620, 7622, 7634
Carter R. H. A. 8308
Castoldi L. 8085
Caughey T. K. 7915
Cavallaro V. G. 8139
Cesari L. 7797
Chakrabarti S. C. 7968
Chalk J. H. H. 7607
Chandrasekharan K. 7977
Charnes A. 8110
Cherubino S. 7642
Chisini O. 8162
Chisnall G. A. 8257
Choudhury D. K. R. 8089
Clauser E. 8222
Clavier A. 8119
Clemow P. C. 8117
Clifford A. H. 7656
Coimbra de Matos A. 7683
Conner P. E. 7774
Constantinescu C. 7836
Constantinescu P. 7723
Cooke J. C. 7908
Cooke-Yarborough E. H. 8312
Coombs A. W. M. 8309
Cooper W. W. 8110
Cordes H. O. 7891, 7954
Corput J. G. van der 7596
Corson H. H. 7616
Cossu A. 8207
Cotlar M. 7785, 7786, 7787, 8032
Cox A. B. 8276
Coxeter H. S. M. 8229
Croisot R. 7673, 7685
Cuzzer Notari V. 8164

D

Daĭovitch V. 7831, 7832
Dantzig G. B. 8102
Darbo G. 8008
David H. S. 8071
David H. T. 8070
Davies M. W. 7748
Davis D. S. 8144
Davis H. 8115
Day M. M. 8003
Debever R. 8216
Debrunner H. 8225
De Giorgi E. 7907
Delange H. 7812
Dell P. C. 8351
Del Pasqua D. 8004, 8021
Denman H. H. 8318
Denniston R. H. F. 8201
Deuring M. 7599
Diener K.-H. 7709
Dingle R. B. 8300, 8301
Dingler H. 7565
Dobrescu A. 766
Dold A. 7763
Dörrie H. 7628 К
Douglis A. 7906
Doyle T. C. 7730
Draper A. 8283
Dubois D. W. 7677
Duda W. L. 8319
Dugué D. 8049
Dumas M. 8091
Dürbaum H. 7679
Dwinger P. 7712

E

Edmondson E. 7716
Eeden C. van 8067, 8068
Ehrenfeucht A. 7631
Ehrenpreis L. 8037
Ehrlich G. 7706
Ekelöf S. 8315
Elgeskog E. 8354
Ellis D. 7739
Elston F. G. 7617
Erdös P. 7594, 7602

F

Fadini A. 8174, 8175
Farinha J. 7959
Faure R. 7864
Fekete M. 7818
Fenain M. 7922
Fine N. J. 7600
Fisher R. A. 8098 К
Flemming D. P. 8275
Fournis Y. 8114
Franchini L. 7943
Franckx E. 8058
Friedel H. 8134 К
Friedman A. 7961
Frölicher A. 7775
Fuchs H. 8342
Fuchs L. 7654
Fulkerson D. R. 8102
Fuller A. T. 7861

G

Gaddum J. W. 8233
Gagliardo E. 7788
Gallo M. 8332
Gambill R. A. 7866
Garabedian P. R. 7934
Garcia Santesmases J. 8307
Gardner R. S. 8095 К
Gates L. D., Jr 8039
Géhéniau J. 8216, 8217
Gehring F. W. 7844
Germain P. 7880
Gersch H. A. 8120
Ghika Al. 7692, 8001
Ghosh N. N. 7637
Gibbons J. F. 8262
Gillies A. W. 7916
Girault M. 8049
Girerd J. L. M. 8334
Glasmann I. M. 8041
Glatfeld M. 7595
Gnedenko B. V. 8062 К
Godeaux L. 8170
Gohier S. 8244
Gołąb S. 7966
Goldberg R. R. 7951, 7992
Gomez Mayorga M. 8129
Goormaghtigh R. 8259
Götz H. 8185
Griffith H. C. 7731
Griffith J. L. 7993
Groot J. de 7712
Guggenheimer H. 8219
Gulotta B. 8059
Gunning R. C. 7850 Д
Gysen E. 7823

H

Haantjes J. 8235
Hadwiger H. 8225
Haibt L. H. 8319
Haight F. A. 8092 К
Haimovici A. 8206
Hall M., Jr 7717 К, 8101
Halphen E. 8086
Harary F. 7728
Harris V. C. 7619
Hashimoto H. 7734
Hawley N. S. 8203
Hayes W. D. 7927
Healy W. C., Jr 8072
Heinz E. 7889
Helmick H. H. 8341
Helmick P. S. 8341
Hély J. 8165
Herron R. E. 8144
Herstein I. N. 7688
Hervé M. 7834
Hilton P. J. 7756
Hoffman A. J. 8107
Hofmann J. E. 8132
Holland J. H. 8319
Honnell P. M. 8326
Hooper F. 8344
Horn R. E. 8326
Householder A. S. 8278
Huber A. 7845
Huron R. 7955
Hu Sze-Tsen 7754

I

Ibáñez Garcia C. 7962
Iizuka K. 7648
Isabeau J. 8338
Isbell J. R. 7800
Itô H. 8080

J

Jacobson N. 7704
Jaffard P. 7668
Jager J. 8083
Janet M. 7909 К
Jecklin H. 8121
Jeffery A. D. 8347
Jenner W. E. 7609
Jerison M. 7665
Johnson G. K. 8111
Juhasz S. 8344

K

Kaarsemaker L. 8081
Kac M. 7940
Kadison R. V. 7695
Kalman J. A. 7710
Kanellos S. G. 8055
Kaplan W. 7849 К
Kapuano I. 7746
Karamata J., 7602
Karták K. 7790
Katsurada Y. 8190, 8191, 8192
Kaufman H. 7948
Kelly P. 8236
Kemeny J. G. 7947
Kerawala S. 8087
Kertész A. 7635
Klamkin M. S. 7979
Klein M. L. 7722
Klein-Barmen F. 7713
Knapiński T. 8147
Knight B. E. 8323
Kobayashi S. 8204, 8208
Kodama Y. 7755
Kolmogorov A. N. 8062 К.
Koszul J. L. 7700
Kovács I. 7689
Kowalsky H.-J. 7679
Krabbe G. L. 8006
Kreindler O. 7568 К
Kreyszig E. 7985
Kruskal W. H. 8070
Kumari S. 7804
Kummer H. 8228
Kurepa G. 7799
Kurita M. 8212
Kustaanheimo P. 7582

L

Labra M. 8146
Lakshmana Rao S. K. 7994
Landau H. G. 8248
Lang S. 7678
Lawley D. N. 8063
Leepin P. 8317
Leeuw K. 7841
Lefevre A. 7625
Legrain Pissard 8154
Lehmer D. H. 7613
Lelong-Ferrand J. 7900
Lesieur L. 7667, 7670, 7671, 7684
Lettvin J. Y. 8351
Lévy P. 8038
Lichnerowicz A. 8199
Liebaut A. 8344
Linfield B. Z. 8224 К
Lions J. L. 8036
Loeb A. L. 8318
Loeffel H. 8047
Lohwater A. J. 7837
Łomnicki A. 7573 К
Longo A. 7967
Loonstra F. 7659
Lord R. D. 8057
Lorraine P. L. 8352
Louhivaara I. S. 8015
Lovingham J. J. 8284

Ludeke C. A. 8227
Łukaszewicz J. 8297 К
Lukaszewicz L. 8343
Luxemburg W. A. J. 8011

M

McCoy N. H. 7681
McCready R. R. 8272
McCulloch M. S. 8351
Macdonald J. R. 7987
McLaughlin J. E. 7711
Mahler K. 8241
Majumer D. 8077
Manaira M. 8064, 8106
Marcus S. 7793
Mardešić S. 7735
Marmion A. 8141
Martin Jadraque V. 7621
Massaro G. P. 7744
Matsumoto K. 7807
Matsusaka T. 8169
Matsushima Y. 7715
Maximon L. C. 7983
Mazille M. 8150 К
Mellon B. 8110
Merpillat R. 8350
Meyer-Eppler W. 8349
Miki Y. 7826
Miller P. H., Jr 8254
Minagawa T. 8243
Mira Fernandes A. de 8213
Miranda C. 7892
Mirsky L. 7643
Mitrinovitch (Mitrinović) D. S. 7633, 7852—7855
Mitrovic D. 8335
Mizuno K. 7759
Moisil Gr. C. 7718, 7719, 7721, 7724
Moppert K. F. 7813
Morelock J. C. 8280
Morgan H. C. 7722
Moriguti S. 8090
Morse M. 8033
Motzkin T. S. 7829
Muckenhoupt B. 7640
Müller C. 7605
Müller F. 8299
Muracchini L. 8237
Musta St. 7950

N

Nádeník Z. 8226
Naghdi P. M. 7933
Nagler H. 8271
Nakanishi S. 7789
Nakaoka M. 7757, 7766
Nalli P. 8189
Namiki M. 7974
Narlikar V. 8220
Natucci A. 7636
Nef W. 7655
Neter J. 8126 К
Neumann B. H. 7660
Nevanlinna R. 38
Nisigaki H. 7843
Nolan J. E. 8340
Nollet L. 8167
Nörlund N. E. 7982
Northam E. S. 7780 Д
Nottrot R. 8235
Novotny K. J. 8284
Nygaard K. 8293

O

Öberg T. 7624
Ogasawara T. 8014
Ohtsuka M. 7782
Olver F. W. J. 8245
Opial Z. 7819
Ore O. 7729
Ossicini A. 7978
Ostle B. 8097 К
Ostrowski A. 7632
Ôtsuki T. 8209
Ottaviani G. 7952
Ozols V. 8075

P

Paige L. J. 7649
Palamà G. 7615, 7630
Papelier G. 8149 К
Papić P. 7735
Papoulis A. 7990
Pappas A. J. 8060
Parodi M. 7997 К
Patterson E. M. 7701
Paue C. 8028
Pavlovič S. V. 8143
Payne L. E. 7931
Peck J. E. L. 7645
Peixoto R. 8151 К
Perotto P. G. 8333
Perry N. C. 8280
Peyerimhoff A. 7975, 7976
Philipson C. 8076
Phillips H. B. 7876 К
Pic Ch. 7653
Pi Calleja P. 8005
Piel G. 8353
Pillai K. C. S. 8066
Pistoia A. 7989
Pitts W. H. 8351
Plainevaux J. E. 8289
Pogorzelski W. 7896, 7970 К
Pontrjagin (Pontryagin) L. S. 7778 К, 7811
Popadić M. S. 7798
Porter R. J. 7608
Prèkopa A. 8012
Price R. 8128 Д
Prosnak W. 8288
Putnam C. R. 8017

Q

Quenouille M. H. 8074

R

Rachajsky B. 7883
Rademacher H. 7612
Rahman Q. I. 7833
Ramanathan K. G. 8230
Ramanujan M. S. 7980
Rankin R. A. 7601
Rao B. R. 8220
Rasch G. 8093 К
Rašković D. 8136
Rattray B. A. 7645
Raymond F.-H. 8331
Reeb G. 8034, 8218
Revuz A. 8028
Rios S. 8056
Rivaud J. 7969 К
Robin L. 7903
Robinson A. 7676
Robinson R. M. 7949
Rochester N. 8319
Rodríguez A. 8131
Rogers C. A. 7784
Rohde F. V. 8109
Rosati F. 7897
Rosenberg A. 7680, 7698
Roy S. K. 8300, 8301
Rubin H. 7800
Ruiz Palá E. 8104
Rushton S. 8079
Russo S. 7981

S

Saban G. 8184
Sakai S. 8018
Salvadori M. 8103
Salzer H. E. 8246
Samelson H. 7767
Samelson K. 8321
Sander A. 8285
San Soucie R. L. 7705
Santalo L. A. 8234
Santesmases J. G. 8336
Saraga W. 8328
Sarkar Sib Sankar 7644
Sasayama H. 8193—8196, 8210
Sauer R. 7901
Saxer W. 8127 К
Schaefer H. 7941, 8024
Schäffer J. J. 7860
Schenkman E. 7661
Schirmer H. 7749
Scott E. J. 7926
Segre B. 7707, 8231
Sen Gupta H. M. 7802
Sexton C. R. 8258
Shanks D. 8270
Shimauti T. 7589
Shull C. G. 8120
Siegel C. L. 7597
Sierpiński W. 7741
Silverman R. J. 8029
Sillitto A. G. 8145
Silvey S. D. 8053
Sirácky A. 7559
Sispánov S. 8287
Šmahel J. 8292
Smith G. S. 7965
Smith P. A. 7585
Sneddon I. N. 7986 К
Spitz J. C. 8123
Spring O. W. 8317
Sprinkle H. D. 7739
Stanley P. E. 8320
Stoker J. J. 7920
Straus E. 8236
Stummel F. 7894
Sugawara M. 7761
Sukhatme P. V. 8096 К
Sumner D. B. 7960
Sydler J. P. 8227
Szász F. 7652
Szász P. 8157
Szele T. 7654, 7690
Szendrei J. 7686

T

Takahashi R. 7663
Takeuti G. 7587, 7588, 7590
Tamura T. 7674
Tanno Y. 7988
Tasny-Tschiassny L. 8247
Taussky O. 7610
Taylor J. 8069
Teghem J. 7593
Teodorescu I. 8223
Terpstra F. J. 7682
Terracini A. 8172
Tétrel A. 7572 К
Teuffel E. 7618
Thébault V. 8140, 8142
Thom R. 7763
Thoma E. 8027
Thonet R. 8171
Tiffen R. 7930
Tikkiwal B. D. 8088
Tocher K. D. 8313
Toda H. 7757
Tomić M. 7806
Tomovich R. 8329
Trautman A. 7905
Trautman D. L. 8115
Tsuji M. 7835
Tsurumi Sh. 8048
Turner I. M. 8111
Turri T. 8176—8179
Trautman D. L. 8115

U

Ulbricht H. 8286
Ursell F. 7928
Utz W. R. 7865

V

Vachaspati 8040
Vajda S. 8108
Vance L. L. 8126 К
Van der Waerden B. L. 7750
Varga R. S. 7992
Varoli G. 7584
Vazsonyi A. 8113
Versois P. 8314
Vesentini E. 8168
Vietoris L. 7560
Vivier M. 7694
Vogelaere R. de 8251
Volpato M. 7862, 7863
Vrănceanu G. 8211
Vučkić M. 7561

W

Wada H. 7752
Walde E. von der 7944
Wallace A. D. 7669, 7672
Walsh J. E. 8073
Walsh J. L. 7816, 7817, 7829
Warmus M. 8297 К
Weil A. 7611
Weinberger H. F. 7857
Weiss L. L. 8291
Whitehead G. W. 7760
Whittle P. 7842
Wiegold J. 7658
Wijngaarden A. 8081
Wilkes M. V. 8260
Wilkinson J. H. 8311
Wilkinson M. K. 8120
Williams F. K. 7722
Williams R. F. 7742
Williamson R. E. 7998 Д
Willson A. J. 8117
Winther A. 8302
Wintner A. 7856
Witt E. 7702
Wold H. 8061 К
Wolfson K. G. 7693, 8013
Woude W. van der 8197
Wunderlich W. 8277
Wu Wen Tsün 7768, 7770
Wynn P. 8256

Y

Yacoub K. R. 7650
Yaglom A. M. 8125

Z

Zaanen A. C. 8011
Zacher G. 7651
Zadunaisky P. E. 8265
Zarković S. S. 8118
Zeckendorf E. 7626
Zedek M. 7817
Zelinsky D. 7680, 7698
Ziller A. 8296 К
Zimmerman H. 7918

並木美喜雄 7974
伍卓群 7794
劉隆復 7809
北原隆 8261
吉田耕作 8042 К
吳文俊 7768, 7769, 7770 7771, 7772, 7773
國吉秀夫 7751
寺田交行 7851
張功安 7732
張素誠 7765
徐利治 7810
恒川實 7623
戶田宏 7753
松島與三 8215
永見啓應 7737
江澤堅 7808
淡中忠郎 7751
王文嫻 8007
謝邦傑 7687
趙訪熊 8264, 8267
関嗣鶴 7598
高橋秀一 7751

Технический редактор *Р. М. Денисова*